ESERCIZI SULLE PROPRIETA' DELLE FUNZIONI

Esercizio 1: Date le funzioni

$$f(x)=x^2+1 \qquad g(x)=\frac{2-x}{2+x} \qquad h(x)=\ln(4-2x)$$

determinare
1. il dominio di f, g ed h;
2. l'immagine di f;
3. massimo e minimo (se esistono), giustificando le risposte , dell'insieme $A=\{x\in R \mid g(x)\geq 0\}$;
4. le inverse di f e di h, se esistono;
5. quando possibile, la funzione composta $f\circ g$.

Esercizio 2: Date le funzioni

$$f(x)=3-\frac{x}{2} \qquad g(x)=\frac{1}{2}e^{5-4x}$$

determinare:
1. il dominio di f e g;
2. l'immagine di f e g;
3. dove esistono, $f\circ g$ e $g\circ f$;
4. se esistono, le inverse di f e g (compresi dominio e codominio).

Esercizio 3: Date le funzioni

$$f(x)=5x-3 \qquad g(x)=1+4x^2 \qquad h(x)=\ln(2-x^2-x)$$

determinare:
1. il dominio di f, g e h;
2. l'immagine di f e g;
3. dove esistono, $f\circ h$ e $h\circ f$;
4. se esistono, le inverse di f e di g.

Esercizio 4: Date le funzioni

$$f(x)=2^x-1 \qquad g(x)=x^2-1 \qquad h(x)=\frac{e^{2x}}{\ln(6x+1)}$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l'immagine di f e g;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f\circ g$;
4. determinare, se esistono, l'inversa di f e di g (calcolando anche il dominio e l'immagine).

Esercizio 5: Date le funzioni

$$f(x) = 3\ln\left(\frac{x}{4}\right) + 1 \qquad g(x) = \frac{2}{x-2}$$

Determinare:
1. il dominio di f e g;
2. l'immagine di f e g;
3. la funzione $f \circ g$;
4. il dominio, l'immagine e la formula di f^{-1} (se esiste);
5. la funzione g è continua in $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 6: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{1+4x} \qquad g(x) = 3[\ln(x) - 1]$$

Determinare:
1. il dominio di f e g;
2. l'immagine di f e g;
3. la funzione $g \circ f$;
4. il dominio, l'immagine e la formula di g^{-1} (se esiste);
5. la funzione f è continua in $x_0 = 1$? Perché?

Esercizio 7: Date le funzioni

$$f(x) = 1 - e^{\frac{3}{x-1}} \qquad g(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

Determinare:
1. il dominio di f e g;
2. l'immagine di f ;
3. le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$;
4. il dominio, l'immagine e la formula di f^{-1} (se esiste);
5. la funzione g è continua in $x_0 = -2$? Perché?

Esercizio 8: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2}{2+x} \qquad g(x) = 2^{\frac{1}{x+5}}$$

Determinare:
1. il dominio di f e g;

2. l’immagine di g;
3. le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$;
4. il dominio, l’immagine e la formula di g^{-1} (se esiste);
5. la funzione f è continua in $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 9: Date le funzioni

$$f(x) = 3^x + 1 \qquad g(x) = 3 - x^2 \qquad h(x) = \frac{\ln(3-2x)}{x+5}$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l’immagine di f e g;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f \circ g$;
4. determinare, se esistono, l’inversa di f e di g (calcolando anche il dominio e l’immagine);
5. calcolare le derivate di f, g ed h.

Esercizio 10: Date le funzioni

$$f(x) = x^2 + 2 \qquad g(x) = \frac{3}{5-4x} \qquad h(x) = \ln\left(\frac{3x}{e^x}\right)$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l’immagine di f e g;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f \circ g$;
4. determinare, se esistono, l’inversa di f e di g (calcolando anche il dominio e l’immagine);
5. calcolare le derivate di f, g ed h.

Esercizio 11: Date le funzioni

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad h(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l’immagine di f e g;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f \circ g$;
4. determinare, se esistono, l’inversa di f e di g (calcolando anche il dominio e l’immagine);
5. calcolare le derivate di f, g ed h.

Esercizio 12: Date le funzioni

$$f(x) = 6 - 3x \qquad g(x) = 1 - 5x^2 \qquad h(x) = \ln(x - x^2)$$

determinare:
1. il dominio di f, g e h;
2. l’immagine di f e g;

3. se esistono, $f \circ h$ e $h \circ f$;
4. se esistono, le inverse di f e di g.

Esercizio 13: Date le funzioni

$$f(x) = 2 - 4x \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \qquad h(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) + 1$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l'immagine di f, g e h;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f \circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di f (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. la funzione f è continua nel punto $x_0 = 2$? Perché?

Esercizio 14: Date le funzioni

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \frac{3}{4}x + 1 \qquad h(x) = 2 - \log(2 - x)$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l'immagine di f, g e h;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $g \circ h$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di f;
5. la funzione f è continua nel punto $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 15: Date le funzioni

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \frac{3}{4}x + 1 \qquad h(x) = 2 - \log(2 - x)$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l'immagine di f, g e h;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $g \circ h$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di f;
5. la funzione f è continua nel punto $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 16: Date le funzioni

$$f(x) = 4x - \frac{1}{2} \qquad g(x) = \frac{1}{2x^2} - 1 \qquad h(x) = 2e^{\frac{1}{x+1}}$$

1. determinare il dominio di f, g e h;
2. determinare l'immagine di f, g e h;
3. dopo aver stabilito le condizioni di esistenza, calcolare $f \circ h$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di f (calcolandone anche il dominio e l'immagine);

5. la funzione g è continua nel punto $x_0 = 0$? Perché?

Esercizio 17: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{3-x} \qquad g(x) = 2 - e^{\frac{1}{x-1}} \qquad h(x) = \frac{x^2-1}{x+4}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare, dove esiste, $f \circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 18: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{2}{3x+2} \qquad g(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{1}{4-x}} \qquad h(x) = \frac{3x^2}{x+1}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare, dove esiste, $f \circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 19: Date le funzioni

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x-1} \qquad g(x) = 1 + \ln(2x-5) \qquad h(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare, dove esiste, $g \circ f$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 20: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{2x}{4-x} + 2 \qquad g(x) = \frac{2}{\ln(x-2)} \qquad h(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare, dove esiste, $g \circ f$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 21: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{3}{x^2-4} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-1 \qquad h(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2+x-6}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. determinare, se esistono, l'inversa di f e di g (calcolandone eventualmente anche il dominio e l'immagine);
4. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 22: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{x}{x-4}-1 \qquad g(x)=-\ln\left(2+x^2\right) \qquad h(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{1-x}}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare $g\circ f$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. calcolare il $\lim_{x\to 1^+} h(x)$.

Esercizio 23: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{x}{3x+2} \qquad g(x)=\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \qquad h(x)=e^{\frac{3x+1}{x^2-9}}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare $f\circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. calcolare il $\lim_{x\to 3^-} h(x)$.

Esercizio 24: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{x}{3x+2} \qquad g(x)=\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \qquad h(x)=e^{\frac{3x+1}{x^2-9}}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare $f\circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. calcolare il $\lim_{x\to 3^-} h(x)$.

Esercizio 25: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{5}{1-3x} \qquad g(x)=\frac{3x+2}{x^2} \qquad h(x)=2\frac{e^{4x-1}}{e^{2x+1}}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di h;
3. calcolare $g\circ f$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di h (calcolandone anche il dominio e l'immagine);
5. calcolare il $\lim_{x\to 0^-} g(x)$.

Esercizio 26: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1} \qquad g(x)=1-\frac{1}{\ln(x+3)} \qquad h(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. determinare, se esiste, l'inversa di f (calcolandone eventualmente anche il dominio e l'immagine);
4. calcolare $g\circ f$;
5. calcolare il $\lim_{x\to -1} h(x)$.

Esercizio 27: Date le funzioni

$$f(x)=\frac{2}{4-x^2} \qquad g(x)=\ln\left(\frac{1}{x-e}\right) \qquad h(x)=\frac{x+3}{x^2+4x+3}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone eventualmente anche il dominio e l'immagine);
4. calcolare $g\circ f$;
5. calcolare il $\lim_{x\to -3} h(x)$.

Esercizio 28: Date le funzioni

$$f(x)=2-\frac{1}{2x} \qquad g(x)=\ln(1+2x) \qquad h(x)=\frac{x^2+3x-4}{x-1}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. calcolare $f\circ g$ e determinarne il dominio e l'immagine;
3. esiste l'inversa di $f\circ g$? Perché? (se esiste si calcolino anche il dominio e l'immagine);
4. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 29: Date le funzioni

$$f(x)=2\ln(5-2x) \qquad g(x)=\frac{3x+1}{2} \qquad h(x)=\frac{2x-3}{x+1}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. calcolare $f\circ g$ e determinarne il dominio e l'immagine;
3. esiste l'inversa di $f\circ g$? Perché? (se esiste si calcolino anche il dominio e l'immagine);
4. determinare gli eventuali asintoti di h.

Esercizio 30: Date le funzioni

$$f(x)=-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}-1} \qquad g(x)=2-\frac{1}{x^2+4} \qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-6}{5x} & per \quad x\neq 3\\[2ex] 2 & per \quad x=3\end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare $f\circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone, eventualmente, anche il dominio e l'immagine);
5. h è continua in $x_0=3$? Perché?

Esercizio 31: Date le funzioni

$$f(x)=3-\frac{3x}{x+5} \qquad g(x)=e^{-3x+1}-2 \qquad h(x)=\begin{cases}3x+5 & per \quad x\leq -1\\[2ex] x^2+3x+4 & per \quad x>-1\end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. determinare l'immagine di f e di g;
3. calcolare $f\circ g$;
4. determinare, se esiste, l'inversa di g (calcolandone, eventualmente, anche il dominio e l'immagine);
5. h è continua in $x_0=-1$? Perché?

Esercizio 32: Date le funzioni

$$f(x)=2x^2-1 \qquad g(x)=\frac{1}{\ln(x+6)} \qquad h(x)=\begin{cases}-x^2 & x\geq 0\\ e^x-1 & x<0\end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;

2. calcolare $g \circ f$;
3. esistono l'inversa di f e l'inversa di g? Perché? (se esistono, se ne calcoli la formula ed il corrispondente dominio);
4. determinare gli eventuali asintoti di g;
5. h è continua in $x_0=0$? Perché?

Esercizio 33: Date le funzioni

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{2x} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 \qquad h(x) = \begin{cases} x+3 & x<1 \\ e^{\frac{1}{x}} & x \geq 1 \end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. calcolare $f \circ g$;
3. g è una funzione pari? Perché?
4. esiste l'inversa di g? Perché? (se esiste, se ne calcoli la formula ed il corrispondente dominio);
5. determinare gli eventuali asintoti di f;
6. h è continua in $x_0=1$? Perché?

Esercizio 34: Date le funzioni

$$f(x) = \frac{x-3}{1-x} \qquad g(x) = 1 - e^{\frac{1}{x^2}} \qquad h(x) = \begin{cases} (\log x)^2 - 1 \; per & x \geq 1 \\ 1-2x \quad per & x<1 \end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. calcolare $f \circ g$;
3. esistono l'inversa di f e l'inversa di g? Perché? (se esistono, se ne calcoli la formula ed il corrispondente dominio);
4. determinare gli eventuali asintoti di f;
5. h è continua in $x_0 = 1$? Perché?

Esercizio 35: Date le funzioni

$$f(x) = e^{-x+1} \qquad g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \quad per & x>0 \\ \log(x^2+1) \; per & x \leq 0 \end{cases}$$

1. determinare il dominio di f, di g e di h;
2. calcolare $g \circ f$;
3. esiste l'inversa di f? Perché? (se esiste, si calcoli anche il corrispondente dominio);
4. determinare gli eventuali asintoti di g;
5. h è continua in $x_0 = 0$? Perché?