



Gli strumenti concettuali di base: modelli e formalizzazione matematica

Corso di Politica Economica – Prof.ssa Maria Alessandra Rossi
Dipartimento di Economia, Università di Chieti-Pescara



Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo
stesso modo 2.5 Italia (CC BY-NC-SA 2.5 IT)

Obiettivo di questa lezione

- Comprendere in che modo gli economisti fanno uso di modelli
- Familiarizzare con/ripassare alcuni concetti di base relativi all'uso della formalizzazione in economia
- Capire la distinzione fra usare un modello per fini positivi e per fini normativi

Che cos'è un modello?

- È una **rappresentazione astratta della realtà**, spesso supportata dalla **formalizzazione matematica**, che serve ad interpretare una realtà complessa semplificandola
- Per creare un buon modello dobbiamo distinguere fra
 - le **caratteristiche essenziali** dell'economia, rilevanti per la questione cui vogliamo trovare risposta, che dovrebbero essere incluse nel modello; e
 - i **dettagli non essenziali** che possono essere ignorati attraverso **ipotesi semplificatrici**
- I modelli necessariamente omettono molti dettagli. Questa è una loro caratteristica, non un loro difetto
- Per cogliere diversi aspetti di uno stesso fenomeno sono tipicamente necessari diversi modelli

Elementi essenziali di un modello

1. Cattura gli elementi dell'economia che pensiamo siano importanti per determinarne i risultati
2. Descrive in che modo gli agenti agiscono, e come interagiscono fra loro e con gli elementi del modello
3. Determina i risultati dell'interazione (un equilibrio)
4. Permette di studiare cosa accade quando cambiano le condizioni

Equilibrio di un modello = situazione che tende a permanere. Un elemento di interesse non cambia a meno che una forza esterna sia introdotta e modifica la descrizione della situazione che emerge dal modello.

Com'è fatto un buon modello?

- È **chiaro**: ci aiuta a comprendere meglio qualcosa di importante
- Fornisce **previsioni accurate**: le sue previsioni sono coerenti con l'evidenza empirica (v. prossima lezione)
- **Migliora la comunicazione**: ci aiuta a capire su cosa siamo d'accordo e su cosa non siamo d'accordo
- È **utile**: lo possiamo usare per trovare modi per migliorare il modo in cui funziona l'economia

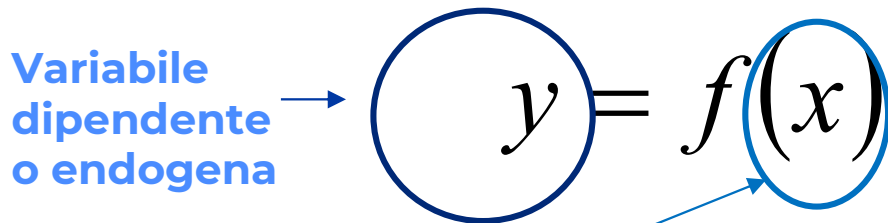
Concetti chiave

- **Ceteris paribus** = semplificazione che comporta “mantenere costanti le altre cose fuori/dentro il modello”.
- **Incentivi** = ricompense o punizioni economiche che influenzano i costi e i benefici di percorsi d'azione alternativi.
- **Prezzi relativi** ci aiutano a comparare le alternative.
- **Rendita economica** = differenza fra il beneficio ricevuto da una scelta e il beneficio che si sarebbe ottenuto dalla migliore azione alternativa disponibile (**opzione di riserva**)
 - Costituisce la base di come effettuiamo le scelte.

Il ruolo della formalizzazione matematica

- L'uso della matematica aiuta a catturare in modo sintetico e preciso
 - Le grandezze rilevanti, espresse come **variabili**
 - Le leggi che legano le variabili, rappresentate da **relazioni** espresse mediante **funzioni**

Una variabile y si dice **funzione** di una variabile x quando ad ogni valore assunto dalla x corrisponde uno ed un solo valore per la y .



Si legge “ y uguale effe di x ”, ad indicare che la variabile y dipende da x secondo la regola generica f – **funzione generale** (indica che esiste una relazione fra le variabili, senza specificare quale)

**Variabile
indipendente
o esogena**

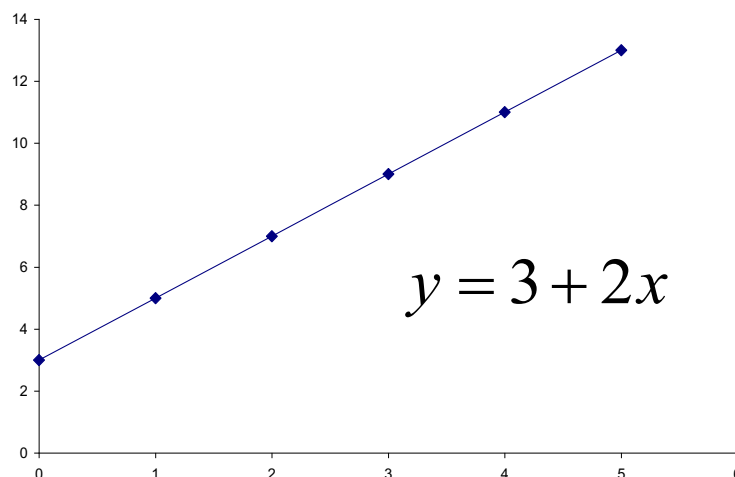
$$y = 2x$$

Quando la relazione è espressa in modo preciso (nell'esempio: per calcolare y si deve prendere la variabile x e moltiplicarla per due) si parla di **funzione specifica**

Il significato delle principali relazioni

Uno degli aspetti importanti da verificare in economia è se la relazione che lega variabile dipendente e indipendente è una **funzione crescente, costante o decrescente**

x	y=3+2x
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13



La **relazione** più semplice è quella **lineare**

Il grafico consente di cogliere la relazione **crescente** (in questo caso)

Più in generale si può rappresentare in questo modo ogni funzione della forma:

$$y = a + bx$$

dove a è l'**intercetta** e b il **coefficiente angolare** che misura la pendenza della retta

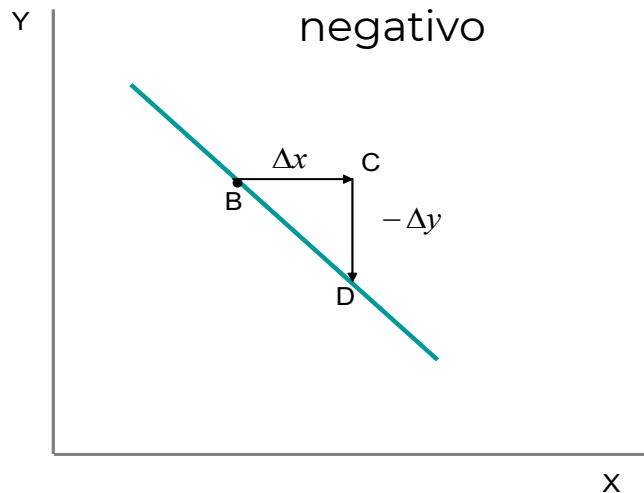
La stessa funzione si può scrivere anche come **funzione implicita**: $ax + by = c$

La pendenza

- Indica quanto varia la variabile rappresentata sull'asse verticale (y) se si varia di una unità la variabile rappresentata sull'asse orizzontale (x)

Pendenza negativa

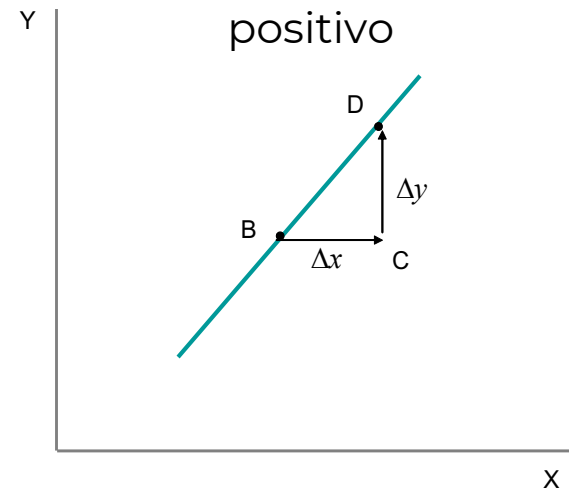
Coefficiente angolare b
negativo



Esempio: $y = 10 - 3x$

Pendenza positiva

Coefficiente angolare b
positivo



Esempio: $y = 3 + 2x$

La pendenza è data dal
rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Questo rappresenta la variazione di y (Δy) se x varia di Δx

Saggio di variazione

- L'espressione $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si utilizza in modo più generale in economia
- Essa indica il **saggio di variazione**, che serve a misurare di quanto varia y al variare di x , anche quando la relazione fra le due variabili non è lineare (non è rappresentabile con una retta)
- In termini generali si può indicare così:

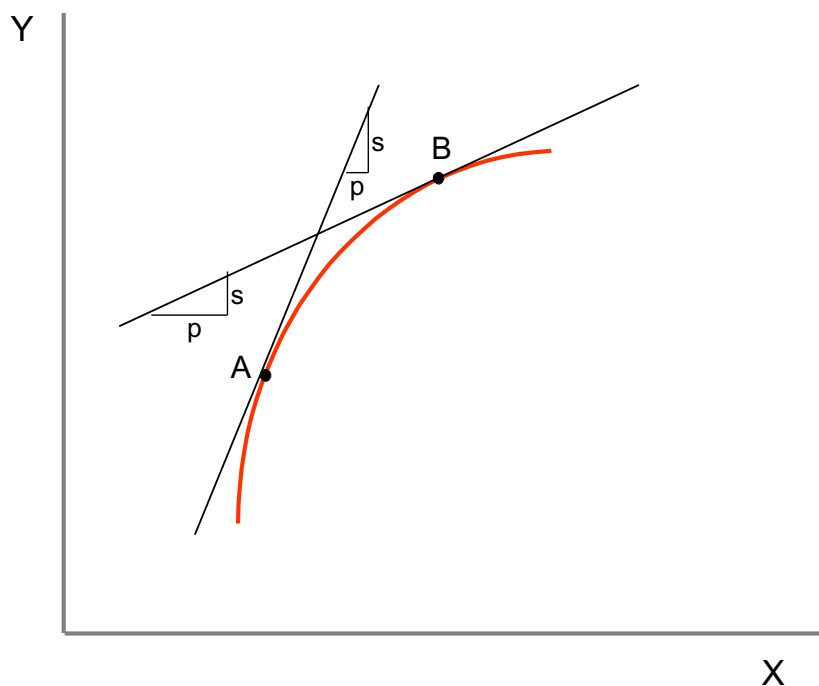
The diagram shows the formula for the variation rate: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. The term $f(x_0 + \Delta x)$ is circled in blue, with an arrow pointing to it from the text "Valore assunto da y dopo la variazione di x". The term $f(x_0)$ is also circled in blue, with an arrow pointing to it from the text "Valore iniziale assunto da y".

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se il saggio di variazione è **positivo**, la pendenza della curva/funzione è positiva
Se il saggio di variazione è **negativo**, la pendenza della curva/funzione è negativa
Maggiore è il valore del saggio di variazione, maggiore è la pendenza

Pendenza di una curva

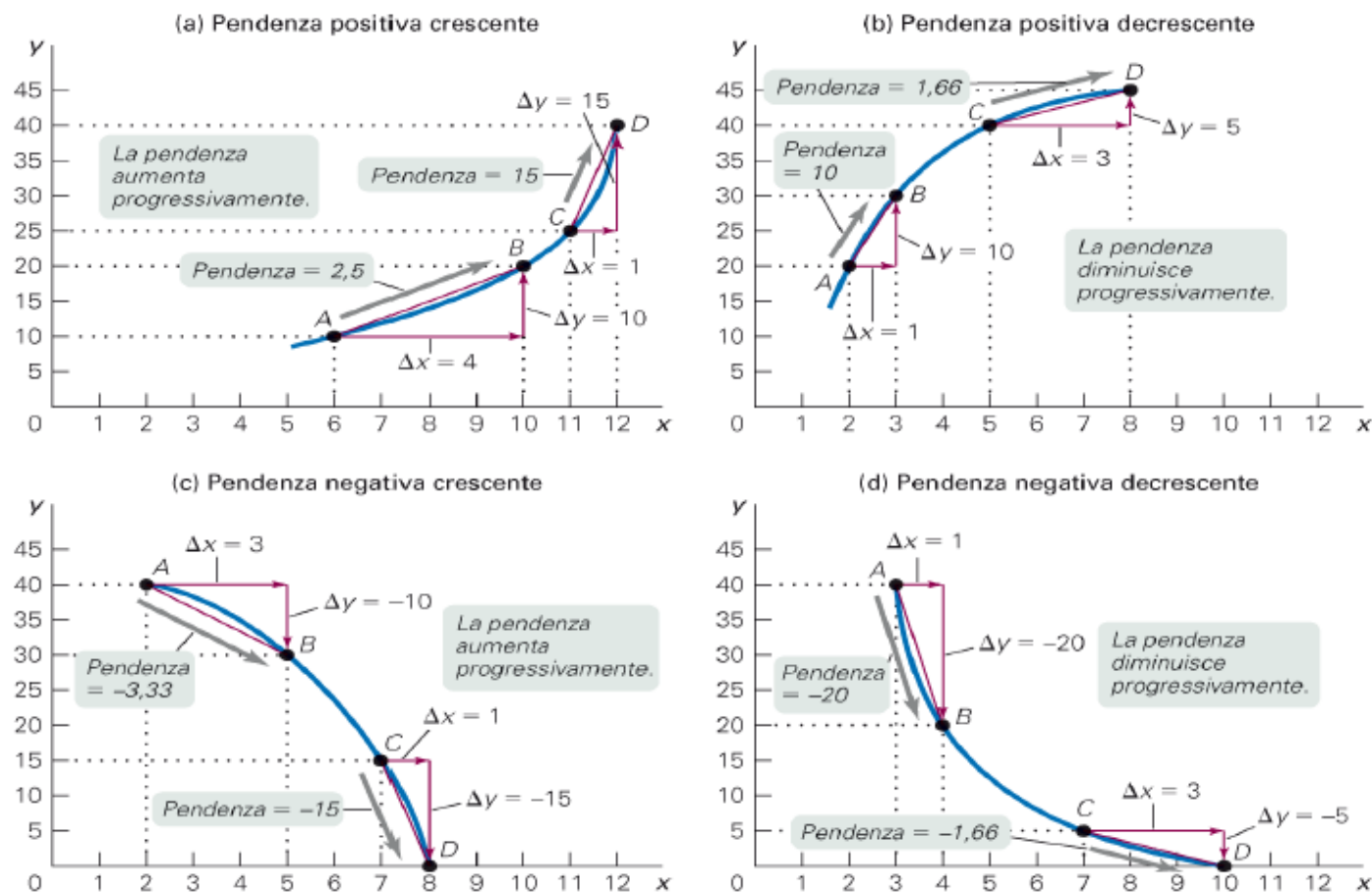
- Una funzione lineare ha la stessa pendenza in ogni punto.
- La **pendenza** invece **cambia** in corrispondenza dei diversi valori di x per le **funzioni non lineari**
- Per individuare la pendenza di una curva in un punto, calcoliamo la pendenza della retta che tocca appena la curva nel punto in questione; tale retta è la **tangente** alla curva in quel punto



La **pendenza è positiva** sia in A che in B

La **pendenza nel punto A è maggiore della pendenza nel punto B**, poiché il rapporto s/p nel punto A è maggiore del rapporto s/p nel punto B.

Pendenza crescente e decrescente



Fonte: P. Krugman, R. Wells, MICROECONOMIA, Zanichelli Editore (2014, seconda ed.)

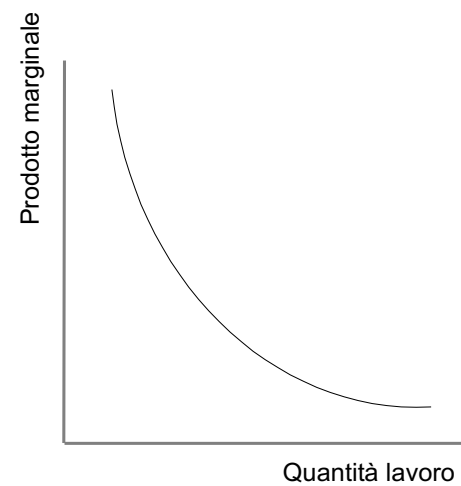
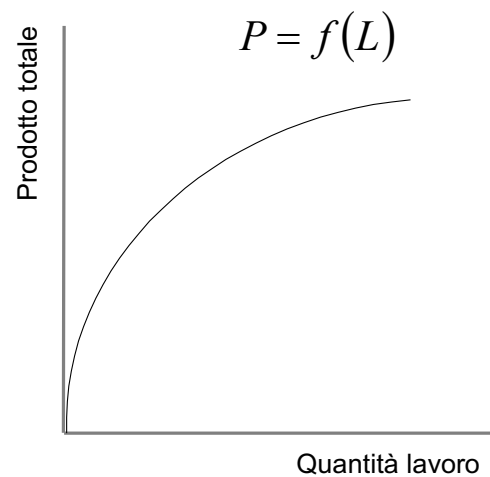
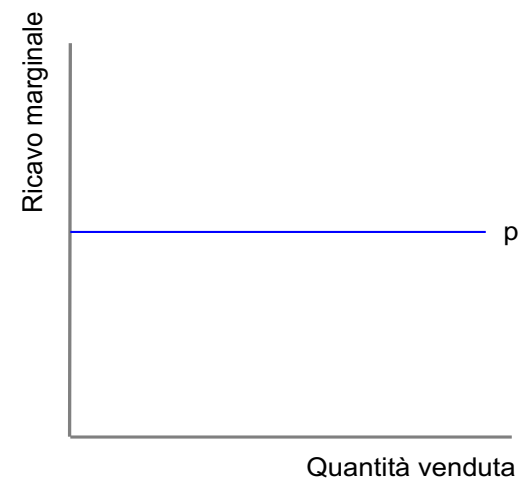
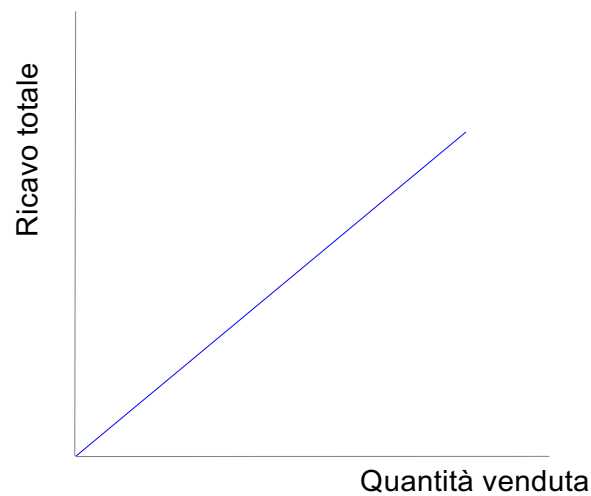
Funzioni concave e convesse – grandezze marginali e totali

- La pendenza di una qualsiasi curva, concava o convessa, normalmente viene descritta usando la **derivata della funzione nel punto**
- La derivata descrive il **comportamento «marginale»** della funzione nel punto, ovvero di quanto cambia il valore assunto dalla funzione (asse delle ordinate) per variazioni piccolissime (marginali) della variabile indipendente x (asse delle ascisse)
- In altre parole descrive il **comportamento del saggio di variazione** sopra descritto **«al limite»**, per variazioni piccolissime (tendenti a zero) della x

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

- La parola «marginale» sarà sempre usata per indicare «quanto cambia» una **grandezza totale** che ci interessa studiare (es. ricavo totale) quando avviene una piccolissima variazione della variabile indipendente che stiamo considerando

Esempio: grandezze totali vs. grandezze marginali



Ipotesi «ceteris paribus»

- Qualche variabile dipendente y può dipendere da molte variabili indipendenti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
- In questo caso si scrive: $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
- Per focalizzare la relazione di interesse (es. come varia la domanda di mercato in funzione del prezzo) e rendere più «gestibile» dal punto di vista matematico l'analisi, gli economisti generalmente **assumono costanti tutte le variabili meno quelle di interesse**
- A esempio, si considera come varia la domanda di un bene al variare del suo prezzo, assumendo costanti i gusti dei consumatori, i prezzi degli altri beni, il reddito ecc.

Quali modelli conoscete?

Un esempio di costruzione di un modello microeconomico/1

Modello di massimizzazione dei benefici dall'impiegare tempo per studiare per questo esame

Step 1: decidere qual è la **variabile di scelta**, quella che può essere controllata dal decisore

t = tempo passato a studiare

Step 2: individuare i costi e i benefici che influenzano la scelta e selezionare quelli su cui si vuole focalizzare l'attenzione

Benefici	Costi
Voto all'esame *	Rinuncia ad altre attività * (costo opportunità)
Miglioramento capacità	Sforzo
Salario futuro	Stanchezza
Gioia dall'apprendimento	

Un esempio di costruzione di un modello microeconomico/2

Step 3: definire le **variabili endogene** e la loro relazione con la variabile di scelta

$V(t)$ – il voto è una funzione crescente in t ($\uparrow t \Rightarrow \uparrow V$)

$O(t)$ – il costo opportunità è una funzione crescente in t ($\uparrow t \Rightarrow \uparrow O$)

Step 4: collocare le variabili endogene nel modello di massimizzazione

$$\max_t V(t) - O(t) \quad \text{Funzione obiettivo}$$

Un esempio di costruzione di un modello microeconomico/3

Step 5: aggiungere le **variabili esogene** (che non cambiano quando cambia il valore della variabile di scelta) nel modello di massimizzazione

Possibili variabili esogene	
Propensione alla vita sociale (p)	*
Sport	
Intelligenza (i)	*
Necessità di lavorare	

$$\max_t V(t, \bar{t}) - O(t, \bar{p})$$

La **scelta ottima t^*** è la soluzione di questo problema di massimizzazione
Spesso si studia come varia la scelta al variare delle variabili esogene (**statica comparata**)

Un esempio di modello macroeconomico dal documento programmatico di bilancio 2022

IV.1 BREVE DESCRIZIONE DEI MODELLI UTILIZZATI

Modello Econometrico ITEM sull'economia Italiana

Il modello econometrico ITEM (*Italian Treasury Econometric Model*) è stato sviluppato ed utilizzato all'interno del Dipartimento del Tesoro del Ministero dell'Economia e delle Finanze. ITEM descrive il comportamento dei principali aggregati dell'economia italiana a livello macroeconomico ed è un modello di medie dimensioni. Include, infatti, 371 **variabili**, di cui 247 **endogene**, e si basa su 36 **equazioni comportamentali** e 211 **identità**. Si tratta di uno strumento di analisi economica di tipo quantitativo utilizzato sia a fini previsivi – effettua proiezioni di medio periodo condizionate al quadro economico internazionale - sia per la **valutazione dell'impatto macroeconomico di interventi di politica economica** o di variazione nelle variabili economiche internazionali. Una caratteristica distintiva di ITEM è quella di formalizzare congiuntamente, all'interno del modello, il lato dell'offerta e il lato della domanda dell'economia. Tuttavia, le condizioni di domanda influenzano le risposte di breve periodo mentre le condizioni dal lato dell'offerta determinano il livello di equilibrio dell'economia nel medio periodo.

https://www.mef.gov.it/inevidenza/2021/article_00065/IT_DPB_2022.pdf

Modelli complessi possono includere quattro categorie di relazioni

1. RELAZIONI TECNICHE

- * funzione di produzione
- * funzione di utilità

2. RELAZIONI COMPORTAMENTALI

- * $Q_D = f(P; \dots) = a - bP$ (funzione di domanda)
- * $C = A + cY$ (funzione di consumo Keynesiana)

3. RELAZIONI DI EQUILIBRIO

- * $Q_D = Q_S$ (equilibrio di mercato singolo)
- * $D = Y$ (equilibrio macroeconomico)

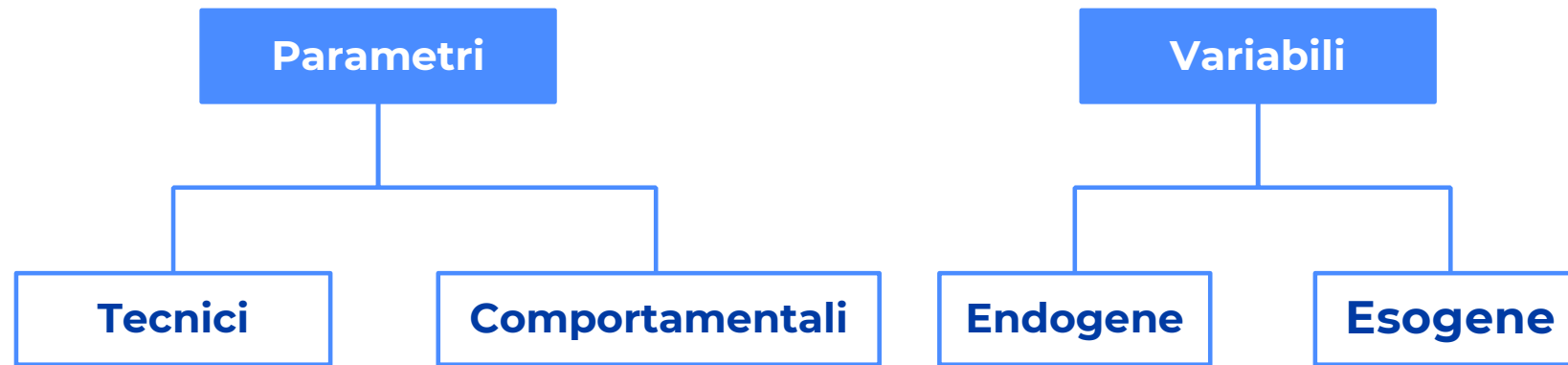
4. RELAZIONI DEFINITORIE

- * $D = C + I + G + X - M$ (domanda aggregata)

4'. RELAZIONI DEFINITORIE "ISTITUZIONALI"

- * $BS = T - G$ (bilancio dello stato)

Variabili vs. parametri



- **Parametri:** elementi considerati fissi nel modello (tutti i parametri sono esogeni, ma non sono variabili perché il loro valore non varia)
- **Variabili endogene:** quelle il cui valore viene spiegato dal modello
- **Variabili esogene:** quelle il cui valore viene assunto come dato (ma può cambiare)
 - perché si riferiscono a fenomeni non economici o a fenomeni consolidati
 - per semplificare il modello

Lettura positiva vs. lettura normativa di un modello

- La distribuzione esogena/endogena delle variabili dipende:
 - dall'obiettivo del modello
 - dalla lettura del modello (positiva o normativa)
- Esempio
 - **Lettura positiva** di un modello: cerco di capire quale livello di reddito sarà prodotto in un paese in un anno (*variabile endogena*), tenendo conto del livello di spesa pubblica nel paese in quell'anno (*variabile esogena*)
 - **Lettura normativa** di un modello: stabilisco quale livello di reddito «ideale» vorrei che il paese raggiungesse (*variabile esogena*) e determino quale livello di spesa pubblica è necessario per raggiungere quel livello di reddito (*variabile endogena*)

Forma del modello

STRUTTURALE:

le equazioni rappresentano le relazioni di struttura del sistema economico e legano variabili endogene con altre variabili ENDOGENE ed ESOGENE

RIDOTTA :

ogni variabile endogena viene espressa soltanto in funzione di variabili esogene.

La forma ridotta è la soluzione del modello

Endogene: $y_1, y_2, \dots, y_m$

Esogene: $x_1, x_2, \dots, x_n$

Forma strutturale	Forma ridotta
$y_1 = g_1(y_2, y_3, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$ $y_2 = g_2(y_1, y_3, \dots, y_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$	$Y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $Y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. . $Y_m = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Un modello in forma strutturale può sempre essere scritto in forma ridotta

- La forma ridotta non necessariamente è lineare, ma è sempre possibile considerarne un'approssimazione lineare (regola di Taylor)
- La forma ridotta linearizzata può essere espressa come un **sistema di equazioni** o in **forma matriciale**

Forma sistemica

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n \\ Y_2 &= a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2n} * x_n \end{aligned}$$

Forma matriciale

parametri
↓

$$\underset{(m*1)}{y} = \underset{(m*n)}{A} * \underset{(n*1)}{x}$$

Domande?

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**

