Basi di connettivi

prof. Gianluca Amato

Modulo di “Logica”
Insegnamento di “Fondamenti di Informatica“
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l’Impresa
a.a. 2023/24

11 novembre 2023

Contenuti

Determinare la fp di un tavola di verità (1)

Consideriamo la seguente tavola di verità con una colonna non definita:

A	B	C	$?$
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	F

Ci chiediamo se esiste una forma proposizionale che la genera.

Determinare la fp di un tavola di verità (2)

Effettivamente, esiste una procedura sistematica per ottenere la fp cercata:

A	B	C	?	
F	F	F	F	
F	F	V	F	
F	V	F	F	
F	V	V	F	
V	F	F	V	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
V	F	V	V	$A \wedge \neg B \wedge C$
V	V	F	V	$A \wedge B \wedge \neg C$
V	V	V	F	

1. individuare le righe il cui risultato è V
2. per ogni riga, scrivere la congiunzione di tutte le variabili: quelle cha hanno valore V appaiono direttamente, quelle cha hanno valore F appaiono negate
3. scrivere la disgiunzione di tutte le congiunzioni ottenute al passo precedente, ottenendo

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Una formula di questo tipo è detta in *forma normale disgiuntiva* (FND). Questo esempio ci mostra anche che tutte le fp ne hanno una equivalente in FND.

Perché funziona?

Ognuna delle tre congiunzioni è vera solo in corrispondenza della riga che l'ha generate (nell'esempio qui sotto, quella dello stesso colore).

L'or di queste congiunzioni è vera in corrispondenza di tutte le righe in cui almeno una delle congiunzioni è vera, cioè in corrispondenza di tutte le righe in cui la colonna ? è V.

A	B	C	?	$P = A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$Q = A \wedge \neg B \wedge C$	$R = A \wedge B \wedge \neg C$	$P \vee Q \vee R$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F

Semplificare la FND (1)

La formula ottenuta in questo modo può essere notevolmente più complessa del necessario. Consideriamo la seguente tavola di verità.

A	B	$?$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Guardando la tavola, è possibile vedere che la formula cercata è $\neg(A \wedge B)$.

Ma applicando il meccanismo visto prima, otteniamo $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Tuttavia, applicando le equivalenze logiche, possiamo semplificarla.

Semplificare la FND (2)

$$
\begin{array}{lll}
 & (\neg A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (A \land \neg B) & \text{(raccoglimento)} \\
\equiv & (\neg A \land (\neg B \lor B)) \lor (A \land \neg B) & \text{(terzo escluso)} \\
\equiv & (\neg A \land \top) \lor (A \land \neg B) & \text{(elemento neutro di } \land) \\
\equiv & \neg A \lor (A \land \neg B) & \text{(prop. distributiva)} \\
\equiv & (\neg A \lor A) \land (\neg A \lor \neg B) & \text{(terzo escluso)} \\
\equiv & \top \land (\neg A \lor \neg B) & \text{(elemento neutro di } \land) \\
\equiv & \neg A \lor \neg B & \text{(De Morgan*)} \\
\equiv & \neg(A \land B) &
\end{array}
$$

Nel passaggio marcato da $*$ è stata usata la legge di De Morgan $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$ al contrario, da destra verso sinistra.

Revisitare le equivalente notevoli

Usando la provedura vista, possiamo facilmente di ottenere le equivalenze che ci consentono di riscrivere i connettivi $\rightarrow$, $\veebar$ in termini di $\wedge$, $\vee$ a $\neg$. Si tratta di:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \veebar B \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

che abbiamo già visto nella lezione sulle equivalenze notevoli.

Contenuti

Basi di connettivi

Abbiamo visto come qualunque fp abbia una equivalente forma normale disgiuntiva. Le FND usano solo i connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Dunque:

Teorema

Tutte le forme proposizionali ne hanno una equivalente che usa solo $\neg$, $\wedge$ *e* $\vee$.

Definizione

Un insieme di connettvi che consentono di esprimere tutte le fp è detto *base di connettivi*.

Il teorema di sopra si può quindi riformulare nel modo seguente:

Teorema

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ *è una base di connettivi.*

$\wedge$ e $\neg$ costituiscono una base di connettivi (1)

In realtà, $\neg$ e $\wedge$ da soli sono sufficienti per avere una base di connettivi. Infatti è facile verificare che

Teorema

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Dimostrazione.

Potremmo verificarlo con le tavole di verità, ma proviamo a farlo per via algebrica. Dalla legge di De Morgan sappiamo che

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Applicando una negazione ad ambo i membri, si ottiene

$$\neg\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

e per la legge di doppia negazione, si ottiene quanto voluto. $\square$

$\land$ e $\neg$ costituiscono una base di connettivi (2)

Poiché

$$A \lor B \equiv \neg(\neg A \land \neg B)$$

quando abbiamo un fp che contiene $\neg$, $\land$ e $\lor$, possiamo rimpiazzare tutte le $\lor$ usando la formula di sopra, ottenendo una formula che usa solo $\neg$ e $\land$.

Esempio

Sia data la fp

$$\neg A \lor (B \land C)$$

Applicando l'equivalenza di prima, otteniamo:

$$\neg(\neg\neg A \land \neg(B \land C))$$

che volendo possiamo semplificare in

$$\neg(A \land \neg(B \land C))$$

$\wedge$ e $\neg$ costituiscono una base di connettivi (2)

Possiamo concludere con il seguente:

Teorema

$\{\neg, \wedge\}$ *è una una base di connettivi.*

Dimostrazione.

Quanlunque formula si può riscrivere in una equivalente che usa solo $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Ma poiché $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$, possiamo rimpiazzare tutte le disgiunzioni con formule che usano solo $\neg$ e $\wedge$. Quindi $\{\neg, \wedge\}$ è una base di connettivi. $\square$

Ovviamente, in maniera analoga, usando il fatto che $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$, si dimostra anche

Teorema

$\{\neg, \vee\}$ *è una una base di connettivi.*

$\wedge$ e $\neg$ non costituiscono una base di connettivi

Ci si potrebbe chiedere se $\wedge$ e $\vee$ costituiscono una base di connettivi, facendo a meno della negazione. La risposta è negativa.

Teorema

$\{\wedge, \vee\}$ *non è una base di connettivi.*

Dimostrazione.

Sia X una fp che usa solo i connettivi $\wedge$ e $\vee$. Poiché $F \vee F = F$ e $F \wedge F = F$, segue che se tutte le lettere proposizionali hanno valore di verità falso, la fp X ha anch'essa valore di verità falso. Quindi X non consente di esprimere tutte le fp. $\square$

Come conseguenza, ovviamente, neanche $\wedge$ o $\vee$ da soli costituiscono una base.

$\to$ e $\perp$ costituiscono una base di connettivi

Teorema

$\{\to, \perp\}$ *è una base di connettivi.*

Dimostrazione.

Basta trovare formule equivalenti a $\neg A$ ed a $A \vee B$ che usano solo $\to$ e $\perp$. È facile verificare che

$$\neg A \equiv A \to \perp$$
$$A \vee B \equiv \neg A \to B \equiv (A \to \perp) \to B$$

$\square$

Invece $\to$ da sola non è sufficiente. Siccome $V \to V = V$, qualunque formula che usa solo $\to$ ha valore di verità V quando tutte le lettere proposizionali hanno valore di verità V. Quindi $\to$ da solo non è sufficiente per esprimere tutte le fp.

Il connettivo nand

Un connettivo nuovo è il connettivo "nand", abbreviazione di "not and". In italiano corrisponde al cosiddetto "o incompatibile". Non esiste un simbolo universalmente accettto per il nand, ma spesso si usa $\uparrow$.

La sua tavola di verità è la negazione della congiunzione:

A	B	$A \uparrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Esempio

A tavola vale la regola: "o si mangia o si parla", vuol dire che non si possono fare entrambe le cose, ma qualunque altra combinazione è ammessa (anche non fare nessuna delle due).

$\uparrow$ costituisce da solo una base di connettivi

Teorema

$\{\uparrow\}$ è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Siccome sappiamo che $\{\neg, \wedge\}$ è una base, basa mostrare che sia $\neg$ che $\wedge$ si possono esprimere usando solo $\uparrow$.

Si ottiene facilmente, con le tavole di verità:

$$\neg A \equiv A \uparrow A$$

$$A \wedge B \equiv \neg(A \uparrow B) \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$$

$\square$

Il connettivo nor

Un altro connettivo nuovo è il connettivo "nor", abbreviazione di "not or". In italiano corrisponde a "non è né ... né" (in inglese, appunto, "neither ... nor"). Anche in questo caso non esiste un simbolo universalmente accettto per il nor, ma spesso si usa $\downarrow$. La sua tavola di verità è la negazione della disgiunzione:

A	B	$A \downarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	F

Esempio

La proposizione "Non è né sabato né domenica" è vera solo se le proposizioni "è sabato" ed "è domenica" sono false.

$\downarrow$ costituisce da solo una base di connettivi

Teorema

$\{\downarrow\}$ *è una base di connettivi.*

Dimostrazione.

Siccome sappiamo che $\{\neg, \vee\}$ è una base, basa mostrare che sia $\neg$ che $\vee$ si possono esprimere usando solo $\downarrow$.

Si ottiene facilmente, con le tavole di verità:

$$\neg A \equiv A \downarrow A$$

$$A \vee B \equiv \neg(A \vee B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$

$\square$