

Logica dei predicati

prof. Gianluca Amato

Modulo di “Logica”
Insegnamento di “Fondamenti di Informatica”
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l’Impresa
a.a. 2023/24

14 gennaio 2024

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

Quantificatori
limitati

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni
- 3 Regole di inferenza corrette
- 4 Quantificatori limitati
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli
- 6 Combinare le regole di inferenza

Fino ad ora abbiamo trattato la *logica proposizionale*. Nella logica proposizionale il costrutto di base è la proposizione, e proposizioni più complesse si ottengono tramite connettivi logici.

Quando entrano in gioco i *quantificatori*, la logica proposizionale non è più sufficiente per determinare la validità di una inferenza.

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è corso} \\ \textit{Tutti i corsi sono francesi} \end{array}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\begin{array}{l} \textit{Socrate è un uomo} \\ \textit{Tutti gli uomini sono mortali} \end{array}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

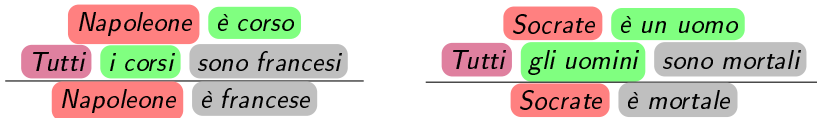
Se analizzate come fatto fin'ora, corrispondo alla regola di inferenza:

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}}{C}$$

che non è corretta! Bisogna passare alla **logica dei predicati**.

A livello predicativo, la forma logica si ottiene in questo modo:

- **esiste** o **per ogni** al posto dei quantificatori (tutti, alcuni, ...);
- **costanti individuali** al posto di individui (Napoleone, Socrate);
- **costanti predicative** al posto di proprietà (essere corso, essere mortale);
- simboli al posto dei connettivi e quantificatori in italiano.



$$\frac{\text{per ogni } x, \text{ se } P a \text{ allora } Q x}{Q a} \Rightarrow \frac{P a}{\forall x (P x \rightarrow Q x)}$$

Le formule che è possibile scrivere nella logica dei predicati sono dette **formule ben formate** (fbf) o semplicemente **formule logiche**. Sono l'equivalente delle *forme proposizionali* viste fin'ora.

Il nostro obiettivo come sempre è capire quando una regola di inferenza è corretta. E la definizione informale di regola di inferenza corretta è la stessa della logica proposizionale:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è **corretta** se e solo se ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Nella logica delle proposizioni la frase “ogni volta che ...” veniva tradotta in maniera più precisa con “in ogni riga della tabella tabella di verità” o “in ogni assegnamento di valori di verità a lettere proposizionali”. Ma cosa significa “ogni volta che ...” nella logica dei predicati?

Facciamo un passo indietro. Più in generale, nella logica proposizionale, “ogni volta che ...” vuol dire “in tutti i possibili modi di interpretare le lettere proposizionali”.

Un formula del tipo $A \rightarrow B$ non è né vera né falsa. Ma se fissiamo una proposizione per ogni lettera proposizionale, allora possiamo tornare indietro, dalla formula tornare ad avere una proposizione, e possiamo discutere del suo valore di verità.

Ad esempio, data la formula $A \rightarrow B \wedge C$, se fissiamo:

- $A =$ Parigi è la capitale della Francia
- $B =$ Roma è la capitale d'Italia
- $C =$ Berlino è la capitale della Finlandia

allora la formula diventa

Se Parigi è la capitale della Francia, allora Roma è la capitale d'Italia e Berlino è la capitale della Finlandia.

che è falsa perché l'antecedente è vero ma il conseguente è falso.

Dunque, potremmo riscrivere la definizione di regola di inferenza corretta in questo modo:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se **per ogni possibile interpretazione delle lettere proposizionali come proposizioni**, ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Tuttavia, ci rendiamo subito conto che la definizione ha dei problemi:

- i possibili modi di interpretare le lettere proposizionali sono infiniti: la definizione ci dà quindi un modo di verificare se una regola di inferenza è corretta;
- rimpiazzare le lettere proposizionali con proposizioni ci manda nel reame del linguaggio naturale dove tutto è ambiguo e non è detto che siamo in grado di dire quali proposizioni sono vere e quali false.

Fortunatamente, ci rendiamo presto conto che non è veramente necessario rimpiazzare le lettere proposizionali con proposizioni, perché l'unica cosa che ci interessa di queste proposizioni è se sono vere o false.

Quindi possiamo, in maniera più semplice, rimpiazzare le lettere con dei valori di verità, e otteniamo la definizione che abbiamo visto fin'ora:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se **per ogni assegnamento di valori di verità alle lettere proposizionali**, ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Nella logica dei predicati, seguiremo questo percorso:

- vedremo dapprima una definizione più informale di correttezza di regola di inferenza, simile a quella della slide precedente;
- poi vedremo una definizione più formale, che purtroppo non sarà così semplice come quella della logica proposizionale.

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

Quantificatori
limitati

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni**
- 3 Regole di inferenza corrette
- 4 Quantificatori limitati
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli
- 6 Combinare le regole di inferenza

Per trasformare una forma proposizionale in una proposizione, era sufficiente rimpiazzare ogni lettera con una proposizione. La cosa non è così semplice nella logica dei predicati. Chiamiamo **interpretazione** il processo con cui passiamo dalle formule ben formate alle proposizioni.

Definizione (Interpretazione — informale)

Una **interpretazione** consiste di:

- un insieme di individui, chiamato *dominio*, da intendersi come i valori su cui le costanti individuali possono essere interpretate e i quantificatori possono essere valutati;
- un assegnamento di un individuo del dominio per ogni costante individuale;
- un assegnamento di un predicato per ogni costante predicativa, tale che:
 - se la costante predicativa si applica ad un solo individuo (tipo Px) allora il predicato dovrà essere una proprietà (“essere pari”);
 - se la costante predicativa si applica a due individui (tipo Pxy) allora il predicato dovrà essere una relazione binaria (“essere più grade di”);
 - in maniera simile per costanti che si applicano a più individui.

Consideriamo le formule

1 $P(a)$

2 $\forall x(Px \rightarrow Rx)$

3 $\forall x\exists yQxy$

e vediamo un paio di interpretazioni, completamente diverse, per queste formule.

Si noti come il dominio influenzi il tipo di predicati che possiamo scegliere per P , Q ed R . Se il dominio sono le regioni italiane, il predicato P non può essere “essere pari” perché non ha senso chiedersi se una regione è pari o dispari.

Esempio (Una interpretazione)

Consideriamo la seguente interpretazione:

- dominio = i numeri interi relativi
- $a = 5$
- $P =$ essere pari
- $R =$ essere divisibile per 4
- $Q =$ essere maggiore di

Le formule diventano:

- 1 “5 è pari” (falso)
- 2 “per ogni numero intero x , se x è pari allora è divisibile per 4” (falso), che si può rendere in maniera più naturale in italiano con “tutti i numeri pari sono divisibili per 4”
- 3 “per ogni numero intero x esiste un numero intero y tale che x è maggiore di y ” (vero)

Esempio (Importanza del dominio)

Consideriamo una nuova interpretazione che differisce dalla precedente solo per il dominio: invece dei numeri interi relativi, consideriamo i numeri naturali (interi positivi).

Le formule diventano:

- 1 “5 è pari” (falso)
- 2 “per ogni numero naturale x , se x è pari allora x è divisibile per 4” (falso), che si può rendere in maniera più naturale in italiano con “tutti i numeri naturali pari sono divisibili per 4”
- 3 “per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che x è maggiore di y ” (falso)

Si noti che l'ultima formula è adesso falsa, mentre prima era vera, perché non esiste un numero naturale minore di 0.

Esempio (Un'altra interpretazione)

Consideriamo ora una interpretazione completamente diversa:

- dominio = le regioni italiane
- a = Lazio
- P = essere a statuto speciale
- R = essere bagnata dal mare
- Q = essere confinante con

e otteniamo

- 1 "il Lazio è a statuto speciale" (falso);
- 2 "per ogni regione italiana x , se x è a statuto speciale allora x è bagnata dal mare", che si può rendere in maniera più naturale in italiano con "tutte le regioni italiane a statuto speciale sono bagnate dal mare" (falso, perché la Val d'Aosta non è bagnata dal mare);
- 3 "per ogni regione italiana x esiste una regione italiana y tale che x è confinante con y " (falso, perché le isole non confinano con altre regioni).

Possiamo quindi definire la correttezza di una regola di inferenza come:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se tutte le interpretazioni che rendono vere le premesse rendono vere anche la conclusione.

Notare che questa definizione non ci consente veramente di stabilire in maniera meccanica se una regola di inferenza è corretta, perché le possibili interpretazioni sono infinite e non possiamo certo provarle tutte!

Tuttavia, ci consente quantomeno di verificare facilmente che una regola di inferenza non è corretta: basta trovare una singola interpretazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione.

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

Quantificatori
limitati

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni
- 3 Regole di inferenza corrette**
- 4 Quantificatori limitati
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli
- 6 Combinare le regole di inferenza

Consideriamo la seguente regola:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \quad Qa}{Pa}$$

e verifichiamo che non è corretta. Notare che anche ad occhio è sospetta, perché assomiglia alla “fallacia dell’affermazione del conseguente”

$$\frac{A \rightarrow B \quad B}{A}$$

ma con un quantificatore.

Consideriamo la seguente interpretazione:

- dominio = numeri naturali
- $a = 2$
- $P =$ essere divisibile per 4
- $Q =$ essere pari

Le premesse sono:

- “per ogni numero naturale x , se x è divisibile per 4 allora x è pari”, ovvero “tutti i numero divisibili per 4 sono pari” (vero)
- “2 è pari” (vero)

e la conclusione è

- “2 è divisibile per 4” (falso)

Quindi la regola non è corretta.

Notare che esistono anche interpretazioni per cui la conclusione è corretta. Ad esempio, basta rimpiazza a con 4 nella precedente interpretazione. Questo però non rende la regola di inferenza corretta!!!

Perché sia corretta, la conclusione deve essere vera in tutte le interpretazioni che rendono vere le premesse: basta trovarne una che non è così (come quella della slide precedente) e la regola non è corretta.

Non è solo il concetto di regola di inferenza corretta che si estende immediatamente al caso predicativo. Anche il concetto di **tautologia** si estende in maniera naturale, sebbene con un altro nome.

Definizione

Una formula è detta **valida** se e solo se è vera in tutte le interpretazioni.

Esempio

La formula $Pa \vee \neg Pa$ è valida, perché è vera in tutte le interpretazioni. Infatti data una qualunque interpretazione:

- se Pa è vera, allora la formula di sopra è $V \vee \neg V = V$;
- se Pa è falsa, allora la formula di sopra è $F \vee \neg F = F \vee V = V$

Notare che a questa conclusione siamo giunti con una dimostrazione matematica, non riempiendo un tabella in maniera meccanica come per la logica proposizionale.

Notare che $Pa \vee \neg Pa$ deriva dal terzo escluso ($A \vee \neg A$) rimpiazzando la formula A con Pa . Questo è un metodo standar per ottenere vормule valide:

Teorema

Se X è una tautologia, tutte le formule ottenuta rimpiazzando in X le lettere proposizionali con formule ben formate sono valide.

Esempio

Le seguenti formule sono valide:

- $(\forall x Px) \vee \neg(\forall x Px)$
- $(\forall x \exists y Qxy) \rightarrow (\forall x \exists y Qxy)$
- $(\forall x Px) \vee Qa \leftrightarrow Qa \vee (\forall x Px)$

Esistono anche formule valide che non derivano da tautologie.

Esempio

La formula $(\forall xPx) \rightarrow Pa$ è una formula valida. Infatti:

- se $\forall xPx$ è vera, P è vero per qualunque elemento del dominio, quindi a maggior ragione è vero per l'elemento a , chiunque esso sia;
- se $\forall xPx$ è falsa, allora l'implicazione è sicuramente vera per definizione.

Infine, il concetto di equivalenza e di conseguenza logica si trasporta in maniera naturale alla logica dei predicati.

Definizione (Equivalenza logica)

Due formule X e Y si dicono **equivalenti** se e solo se sono vere nelle stesse interpretazioni.

Definizione (Conseguenza logica)

Una formula X è **conseguenza logica** delle formule X_1, \dots, X_n se e solo se in ogni interpretazione in cui sono vere X_1, \dots, X_n è vera anche X .

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

**Quantificatori
limitati**

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni
- 3 Regole di inferenza corrette
- 4 Quantificatori limitati**
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli
- 6 Combinare le regole di inferenza

Consideriamo le proposizioni:

“Tutti sono mortali” “Tutti gli uomini sono mortali”

La prima afferma che qualunque individuo è mortale, mentre nella seconda la proprietà di essere mortali è ristretta solo ad alcuni individui (gli uomini) perché magari altri (gli dei?) non lo sono. Si parla in questo secondo caso di **quantificatore limitato**.

Il quantificatore limitato si può ottenere dal quantificatore illimitato in questo modo. Se:

- Mx sta per “ x è mortale”
- Ux sta per “ x è un uomo”

la forma logica di “Tutti gli uomini sono mortali” diventa

$$\forall x(Ux \rightarrow Mx)$$

Letteralmente: “qualunque individuo x prendiamo, se x è un uomo allora x è mortale”.

Per comodità, però, in certi ambiti si usa una notazione più compatta per il quantificatore universale limitato. Ad esempio, in matematica.

Esempio (Quantificatore limitato da un insieme)

Se vogliamo dire

“Tutti gli elementi dell’insieme A sono positivi”

possiamo scrivere

$$\forall x(x \in A \rightarrow x > 0)$$

ma è più comodo scrivere

$$\forall x \in A (x > 0)$$

La seconda formula è solo un modo compatto di scrivere la prima.

Anche il quantificatore esistenziale ha una variante limitata. La proposizione:

“Esiste un uomo che sa volare”

vuol dire non solo che esiste un qualche individuo che vola, ma che possiamo scegliere quell'individuo in modo che sia un uomo.

Il quantificatore limitato, anche in questo caso, lo si può ottenere da quello standard. Se

- Mx sta per “ x è mortale”
- Ax sta per “ x sa volare”

allora la forma logica della proposizione è

$$\exists x(Mx \wedge Ax)$$

Attenzione! La formula corretta $\exists x(Mx \wedge Ax)$ con l'uso della **congiunzione** e non $\exists x(Mx \rightarrow Ax)$ che vorrebbe dire tutt'altro!

Per comodità, in certi ambiti si usa una notazione più compatta per il quantificatore esistenziale limitato. Ad esempio, in matematica.

Esempio (Quantificatore limitato da un insieme)

Se vogliamo dire

“Esiste un elemento dell'insieme A positivo”

possiamo scrivere

$$\exists x(x \in A \wedge x > 0)$$

ma è più comodo scrivere

$$\exists x \in A (x > 0)$$

La seconda formula è solo un modo compatto di scrivere la prima.

La realtà c'è una certa ambiguità sul fatto che un quantificatore sia limitato o no: dipende da qual è l'**universo del discorso**, ovvero l'insieme di tutti gli individui a cui si riferisce il quantificatore.

Normalmente quale sia l'universo del discorso va capito dal contesto. Ad esempio, supponiamo di avere a che fare con le seguenti proposizioni:

“Tutti gli uomini sono mortali”
 “Tutti i cetacei vivono in acqua”
 “Esiste un mammifero che vola”

L'universo del discorso potrebbe essere **i mammiferi** o **gli animali**. In ogni caso:

- i quantificatori vanno intesi in senso limitato;
- avremo bisogno dei predicati "essere uomo", "essere cetaceo", "essere mammifero" per poter scrivere le formule.

In altri termini, l'universo del discorso è la versione in linguaggio naturale del concetto di dominio.

Supponiamo però che le proposizioni a cui siamo interessati siano:

“Tutti gli uomini sono mortali”
 “Esiste un uomo più alto di due metri”
 “Nessun uomo è in grado di volare”

In questo caso:

- possiamo prendere come universo del discorso direttamente gli [esseri umani](#);
- i quantificatori possono essere intesi in senso illimitato;
- non abbiamo bisogno del predicato “essere uomo”: la forma logica della prima proposizione è semplicemente $\forall xMx$, dove M è il predicato “essere mortale”.

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

Quantificatori
limitati

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni
- 3 Regole di inferenza corrette
- 4 Quantificatori limitati
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli**
- 6 Combinare le regole di inferenza

Se abbiamo una equivalenza logica proposizionale e rimpiazziamo le lettere proposizionali con formule ben formate, otteniamo una equivalenza logica predicativa.

Esempio

Data l'equivalenza logica $A \wedge B \equiv B \wedge A$, otteniamo l'equivalenza logica predicativa

$$(\forall xPx) \wedge \exists x(Qx \wedge \forall yRxy) \equiv \exists x(Qx \wedge \forall yRxy) \wedge (\forall xPx)$$

sostituendo A con $\forall xPx$ e B con $\exists x(Qx \wedge \forall yRxy)$.

Se indichiamo con le lettere X ed Y delle formule generiche, possiamo scrivere l'equivalenza logica predicativa come

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X .$$

Due equivalenze logiche molto importanti (e molto ricorrenti nei test di logica) sono le seguenti:

$$\neg\exists xX \equiv \forall x\neg X \qquad \neg\forall xX \equiv \exists x\neg X$$

Esempio

Supponiamo che l'universo del discorso siano gli esseri umani. Allora, se X è la formula “ x sa volare”:

- $\neg\exists xX$ è “non esiste un essere umano che sa volare”
- $\forall x\neg X$ è “tutti gli essere umani non sanno volare”

ed entrambi vogliono dire la stessa cosa (sebbene il secondo in italiano sia innaturale)

Questa equivalenza ci consente quindi di spostare la negazione dentro o fuori un quantificatore, pur di cambiare il tipo del quantificatore.

Notare che questa equivalenza ci consente anche di dimostrare che i due quantificatori sono ridondanti. Ne basterebbe solo uno. Infatti:

$$\begin{aligned} \exists x X &\equiv \neg\neg\exists x X && \text{(doppia negazione)} \\ &\equiv \neg\forall x\neg X && \text{(equivalenza precedente)} \end{aligned}$$

Esempio

“Esiste un gatto nero” è equivalente a “non è vero che tutti i gatti non sono neri”.

Ovviamente si preferisce continuare ad usare due quantificatori perché rendono il discorso più chiaro.

Ovviamente anche il \forall si può riscrivere usando negazione ed \exists :

$$\begin{aligned} \forall x X &\equiv \neg \neg \forall x X && \text{(doppia negazione)} \\ &\equiv \neg \exists x \neg X && \text{(equivalenza precedente)} \end{aligned}$$

Esempio

“Tutti i gatti sono neri” è equivalente a “non esiste un gatto che non è nero”.

Queste equivalenze assomigliano un po' alla legge di De Morgan, che riportiamo qui sotto:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Il quantificatore \forall è una specie di “congiunzione” di formule, mentre il quantificatore \exists è una specie di “disgiunzione” di formule. Ad esempio, se l’universo del discorso sono i numeri naturali, in maniera non del tutto rigorosa possiamo scrivere:

$$\forall x P_x \equiv P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots$$

$$\exists x P_x \equiv P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3 \dots$$

Applicando De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x P_x) &\equiv \neg(P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots) && \text{(equivalenza vista prima)} \\ &\equiv (\neg P_0) \vee (\neg P_1) \vee (\neg P_2) \vee \dots && \text{(legge di De Morgan)} \\ &\equiv \exists x (\neg P_x) && \text{(equivalenza vista prima)} \end{aligned}$$

Le equivalenze precedenti valgono anche per i quantificatori limitati. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
 \neg \forall x \in A (x > 0) &\equiv \neg \forall x (x \in A \rightarrow x > 0) && \text{(rimozione del quantificatore limitato)} \\
 &\equiv \exists x \neg (x \in A \rightarrow x > 0) && \text{(equivalenza precedente)} \\
 &\equiv \exists x \neg \neg (x \in A \wedge \neg (x > 0)) && \text{(poiché } A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)) \\
 &\equiv \exists x (x \in A \wedge \neg (x > 0)) && \text{(doppia negazione)} \\
 &\equiv \exists x \in A \neg (x > 0) && \text{(reintroduzione del quantificatore limitato)}
 \end{aligned}$$

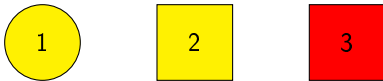
In generale:

$$\begin{aligned}
 \neg \forall x (Y \rightarrow X) &\equiv \exists x (Y \wedge \neg X) \\
 \neg \exists x (Y \wedge X) &\equiv \forall x (Y \rightarrow \neg X)
 \end{aligned}$$

Nei prossimi esempi utilizzeremo la seguente interpretazione:

- il dominio sarà un insieme di tessere che possono avere varie forme e colori;
- il predicato unario R sta per “essere rotondo”;
- il predicato unario G sta per “essere giallo”.

Il numero di tessere, la loro forma e colore verrà rappresentato graficamente. Ad esempio



è una interpretazione con tre tessere, la prima gialla e tonda, la seconda gialla e rettangolare, la terza rossa e rettangolare.

Consideriamo la formula $\forall x(Rx \wedge Gx)$, che in italiano si può tradurre con

“tutte le tessere sono rotonde e gialle”

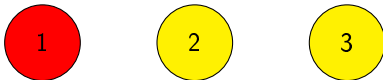
Dovrebbe essere evidente che questa è equivalente a $(\forall xRx) \wedge (\forall xGx)$, ovvero

“tutte le tessere sono rotonde e tutte le tessere sono gialle”

La seguente interpretazione soddisfa sia $\forall x(Rx \wedge Gx)$ che $(\forall xRx) \wedge (\forall xGx)$:



mentre la seguente non soddisfa nessuna delle due



È possibile trovare un insieme di tessere che soddisfi $\forall x(Rx \wedge Gx)$ ma non $(\forall xRx) \wedge (\forall xGx)$, o viceversa ?

Vi renderete presto conto che non è possibile, perché le due formule sono equivalenti e quindi sono vere esattamente nelle stesse interpretazioni !

Più in generale, è vera la seguente equivalenza, che è un sorta di proprietà distributiva del quantificatore universale rispetto alla congiunzione:

$$\forall x(X \wedge Y) \equiv (\forall xX) \wedge (\forall xY)$$

Ci chiediamo adesso se valga anche l'equivalenza

$$\forall x(Rx \vee Gx) \equiv (\forall xRx) \vee (\forall xGx)$$

ovvero

“tutte le tessere sono rotonde o gialle”

\equiv

“tutte le tessere sono rotonde o tutte le tessere sono gialle”

Tuttavia, la seguente interpretazione soddisfa $\forall x(Rx \vee Gx)$ ma non $(\forall xRx) \vee (\forall xGx)$:



È vero però che

$\forall x(Rx \vee Gx)$ è conseguenza logica di $(\forall xRx) \vee (\forall xGx)$

Infatti se $(\forall xRx) \wedge (\forall xGx)$, allora o tutte le tessere sono rotonde, oppure sono tutte gialle (o anche entrambe le cose). In ogni caso, ogni tessera è o rotonda o gialla.

Una interpretazione che:

- rende vera $(\forall xRx) \vee (\forall xGx)$
- rende falsa $\forall x(Rx \vee Gx)$

non esiste!

In generale è vero che:

$\forall x(X \vee Y)$ è conseguenza logica di $(\forall xX) \vee (\forall xY)$

Se rimpiazziamo il quantificatore universale con l'esistenziale, otteniamo proprietà simili.
Intanto

$$\forall x(Rx \vee Gx) \equiv (\forall xRx) \vee (\forall xGx)$$

ovvero

“esiste una tessera rotonda o gialla”

\equiv

“esiste una tessera rotonda o esiste una tessera gialla”

In generale è vero

$$\forall x(X \vee Y) \equiv (\forall xX) \vee (\forall xY)$$

Consideriamo adesso

- $\exists x(Rx \wedge Gx)$, ovvero “esiste una tessera rotonda e gialla”
- $(\exists xRx) \wedge (\exists xGx)$, ovvero “esiste una tessera rotonda ed esiste una tessera gialla”

Sono equivalenti ?

La risposta è no. Questa interpretazione rende vera la seconda ma non la prima:



Infatti è vero che esiste una tessera rotonda (la 1 e la 3) e che esiste una tessera gialla (2), ma non esiste una tessera che è rotonda e gialla contemporaneamente.

È vero però che

$(\exists xRx) \wedge (\exists xGx)$ è conseguenza logica di $\exists x(Rx \wedge Gx)$

Infatti se $\exists xRx \wedge \exists xGx$, vuol dire che possiamo trovare una tessera che è rotonda e gialla allo stesso tempo. Ovviamente, grazie a questa tessera, sarà vera sia $\exists xRx$ che $\exists xGx$.

Una interpretazione che:

- rende vera $\exists x(Rx \wedge Gx)$
- rende false $(\exists xRx) \wedge (\exists xGx)$

non esiste!

In generale è vero che:

$(\exists xX) \wedge (\exists xY)$ è conseguenza logica di $\exists x(X \wedge Y)$

Una regola di inferenza molto importante, perché rappresenta il concetto stesso di quantificatore universale, è la seguente:

$$\frac{\forall xPx}{Pa}$$

detta regola di **eliminazione del quantificatore universale**.

Informalmente, vuol dire che se so che P è vero per tutti gli individui, allora sarà sicuramente vero per a , chiunque sia a .

Ovviamente il contrario è in generale sbagliato:

$$\frac{Pa}{\forall xPx}$$

Se sappiamo che P è vero per un certo elemento a , non possiamo concludere che P è vero per tutti gli individui.

Il quantificatore esistenziale ha una regola corrispondente che è:

$$\frac{Pa}{\exists xPx}$$

detta regola di **introduzione del quantificatore esistenziale**.

Informalmente, vuol dire che se so che P è vera per un certo individuo a , posso concludere che esiste un individuo x che rende vera Px (l'individuo in questione è proprio a !!).

Ovviamente il contrario è in generale sbagliato:

$$\frac{\exists xPx}{Pa}$$

Se sappiamo che c'è un individuo per cui vale P , non possiamo concludere questo individuo sia proprio a .

Logica dei
predicati

Gianluca
Amato

Dalle
proposizioni ai
predicati

Interpretazioni

Regole di
inferenza
corrette

Quantificatori
limitati

Equivalenze e
conseguente
logiche
notevoli

Combinare le
regole di
inferenza

- 1 Dalle proposizioni ai predicati
- 2 Interpretazioni
- 3 Regole di inferenza corrette
- 4 Quantificatori limitati
- 5 Equivalenze e conseguente logiche notevoli
- 6 Combinare le regole di inferenza

C'è una differenza enorme di complessità tra logica delle proposizioni e dei predicati:

- nella logica delle proposizioni, c'è un metodo sistematico per capire se una regola di inferenza è corretta o no (le tavole di verità);
- nella logica dei predicati non esiste un metodo simile;
- nella logica dei predicati anche capire se una formula è vera in una data interpretazione è difficile.

Un modo per determinare se una regola di inferenza è corretta consista nel capire se è possibile ottenerla **combinando regole di inferenza note**.

Verifichiamo che la seguente regola di inferenza è corretta:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \quad Pa}{Qa}$$

Si procede come segue:

- diamo dei numeri alle formule delle premesse della regola;
- ad ogni passo applichiamo una regola di inferenza nota a due formule che abbiamo numerato, ottenendo una nuova formula che numeriamo con un numero più grande;
- se riusciamo ad ottenere in questo modo la conseguenza della regola, vuol dire che la regola è corretta.

Quella che otteniamo è una **dimostrazione formale** della correttezza della regola.

Verifichiamo che la seguente regola di inferenza è corretta:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \quad Pa}{Qa}$$

Dimostrazione:

1 $\forall x(Px \rightarrow Qx)$

2 Pa

3 $Pa \rightarrow Qa$

(1, eliminazione del quantificatore universale)

4 Qa

(2, 3, modus ponens)

Dunque la regola di inferenza è corretta.

Questo metodo di dimostrazione delle regole di inferenza, così com'è, non è sufficiente a verificare tutte le regole di inferenza corrette. Tuttavia, ne esistono vari miglioramenti, chiamati **sistemi di prova**, che consentono di dimostrare qualunque inferenza corretta.

Questi sistemi di prova sono almeno in parte meccanizzabili, per cui è possibile scrivere programmi che, data una regola di inferenza, provano a dimostrarne la correttezza. Si tratta dei **dimostratori automatici di teoremi**, come ad esempio **Vampire**.

L'argomento è molto complesso ed esula completamente dagli obiettivi di questo insegnamento.