EQUIVALENZE E CONSEGUENZE LOGICHE PER LA LOGICA DEI PREDICATI

• DERIVATE DALLA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$ (LOGICA DELLE PROPOSIZIONI)

$\forall x\, Px$ $\qquad$ $\exists x(Qx \wedge \forall y\, Rxy)$

$$(\forall x\, Px) \wedge \exists x(Qx \wedge \forall y\, Rxy) \equiv (\exists x(Qx \wedge \forall y\, Rxy)) \wedge (\forall x\, Px)$$

In maniera compatta

formule logiche a scelta

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$$

Non tutti i gatti sono neri.

$Nx \equiv x$ è nero

$Gx \equiv x$ è un gatto

Non è vero che tutti i gatti sono neri

Non è vero che per ogni x, x è nero

$\neg \forall x\, Nx$ $\qquad$ $\neg \forall x\,(Gx \rightarrow Nx)$

|||

Esiste almeno un gatto che non è nero

Esiste x tale che x non è nero

Esiste x tale che x è un gatto e x è nero

$\exists x\ \neg Nx$ $\qquad\qquad$ $\exists x\,(Gx \wedge \neg Nx)$

IN GENERALE

$$\boxed{\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg \varphi}$$

PER QUALUNQUE FORMULA φ

$$\neg \forall x\, Nx \equiv \exists x\ \neg Nx$$

$$\neg \forall x\,(Gx \to Nx) \equiv \exists x\ Gx \wedge \neg Nx$$

IN GENERALE

$$\boxed{\neg \forall x\,(\beta \to \eta) \equiv \exists x\,(\beta \wedge \neg \eta)}$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\neg \forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg \varphi$$

$Vx \equiv x$ è verde

Non esiste un gatto verde $\qquad \neg \exists x\ Vx$

|||

Tutti i gatti non sono verdi $\qquad \forall x\ \neg Vx$

↓ GENERALIZZARE

$$\neg \exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg \varphi$$

Tutti i gettoni sono gialli e rotondi

$$\downarrow$$

$Gx \equiv x$ è giallo

$Rx \equiv x$ è rotondo

$$\forall x \left(Gx \wedge Rx \right)$$

$$\equiv$$

(Tutti i gettoni sono gialli) e (tutti i gettoni sono rotondi)

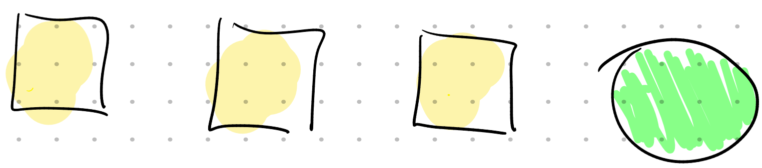
$$\left(\forall x \, Gx \right) \wedge \left(\forall x \, Rx \right)$$

$\downarrow$ Generalizzando

$$\forall x (\beta \wedge \gamma) \equiv \forall x \beta \wedge \forall x \gamma$$

$$\forall x (\beta \vee \gamma) \overset{?}{\equiv} \forall x \beta \vee \forall x \gamma$$

Tutti i gettoni sono gialli o rotondi ✓ $\overset{?}{\equiv}$ Tutti i gettoni sono gialli (F) o tutti i gettoni rotondi (F) $\}$ F



$$\frac{(\forall x\, \beta) \vee (\forall x\, \gamma)}{\forall x\, (\beta \vee \gamma)}$$

QUESTA È UNA INFERENZA CORRETTA
MA LE DUE FORMULE NON SONO
EQUIVALENTI

$$\exists x\, (\beta \wedge \gamma) \overset{?}{\equiv} \exists x\, \beta \wedge \exists x\, \gamma$$

$$\exists x\, (\beta \vee \gamma) \overset{?}{\equiv} \exists x\, \beta \vee \exists x\, \gamma$$

Esiste un gettone che è giallo o rotondo

Esiste un gettone giallo o
esiste un gettone rotondo

Supponiamo sia vera la prima. Vuol dire che esiste un gettone, lo chiamo
Pippo, che è o giallo o rotondo. Ci sono due possibilità:

1) Pippo è giallo. $\Rightarrow$ esiste un gettone giallo $\Rightarrow$
esiste un gettone giallo o esiste un gettone rotondo

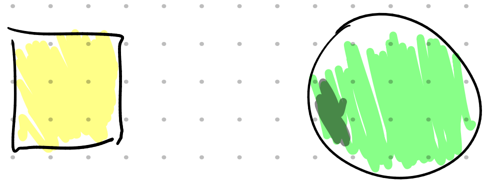
2) Pippo è rotondo $\Rightarrow$ esiste un gettone rotondo $\Rightarrow$
esiste un gettone giallo o esiste un gettone rotondo

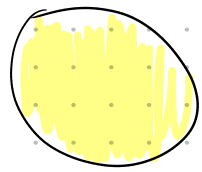
Questa è una dimostrazione che se $\exists x\, (\beta \vee \gamma)$ è vera,
allora è vera $\exists x\, \beta \vee \exists x\, \gamma$. In maniera simile si può
dimostrare il contrario.

Esiste un gettone giallo e rotondo $\overset{?}{\equiv}$ Esiste un gettone giallo ed esiste un gettone rotondo. } V

F

V V





$$\frac{\exists x\,(\beta \wedge \gamma)}{\exists x\,\beta \;\wedge\; \exists x\,\gamma}$$

È CORRETTA SEBBENE LE DUE FORMULE NON SIANO EQUIVALENTI

$$\neg \forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi$$

$$\forall x\,\varphi \equiv \neg\neg\forall x\,\varphi \equiv \neg\exists x\,\neg\varphi$$

Tutti i gatti sono neri $\equiv$ non esiste un gatto che non è nero

$$\exists x\,\varphi \equiv \neg\forall x\,\neg\varphi$$

$$\frac{\forall x\,(Px)}{Pa} \qquad \frac{\forall x\,(Px \to Qx)}{Pa \to Qa}$$

$P \equiv$ essere uomo

$Q \equiv$ essere mortale

Tutti gli uomini sono mortali

Se Socrate è un uomo (V) allora Socrate è mortale (V) } V

Se Zeus $\overset{F}{\text{è}}$ un uomo allora Zeus $\overset{F}{\text{è}}$ mortale

Eliminazione del quantificatore universale.

$$\cancel{\frac{Pa}{\forall x\, Px}}$$

P ≡ essere pari

a ≡ 2

$$\frac{\text{2 è pari}}{\text{tutti i numeri pari}}$$

$$\frac{Pa}{\exists x\, Px}$$

$$\frac{\text{2 è pari}}{\text{esiste almeno un numero pari}}$$

regola di introduzione del quantificatore esistenziale

$$\cancel{\frac{\exists x\, Px}{Pa}}$$

P ≡ essere pari

a ≡ 3

$$\frac{\text{esiste un numero pari}}{\text{3 è pari}}$$

COME VERIFICARE UNA REGOLA DI INFERENZA A PARTIRE DALLE REGOLE DI INFERENZA "NOTEVOLI"

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\,(Px \to Qx)\\ Pa\end{array}}{Qa}$$

1) $\forall x \, (P_x \to Q_x)$

2) P_a

3) da 1, tramite la regola di eliminazione del quantificatore universale ottengo

$$P_a \to Q_a$$

$$P_a \to Q_a$$

$$\frac{\begin{array}{ll} A \to B & \\ A & P_a \end{array}}{\begin{array}{ll} B & Q_a \end{array}}$$

4) da 3 e 2, usando il modus ponens, ottengo

$$Q_a$$

Questo procedimento è meccanizzabile: si ottiene un dimostratore automatico di teoremi.