

Logica (Fondamenti di Informatica)

a.a. 2023/2024 – 1 febbraio 2024

Esercizio 1 (8 punti)

Estrarre dalla seguente tabella di verità la forma proposizionale corrispondente alla colonna *. In seguito, semplificare la forma proposizionale ottenuta usando le equivalenze logiche note. Non è considerato valido estrarre direttamente la forma proposizionale semplificata dalla tabella.

A	B	C	D	*
F	F	F	F	F
F	F	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	V	V	F
F	V	F	F	F
F	V	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	F	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	V	V	F
V	V	F	F	F
V	V	F	V	F
V	V	V	F	V
V	V	V	V	V

Soluzione

Prima di tutto bisogna individuare in quali righe della tabella la formula * deve avere valore di verità V. Per ognuna di queste righe, si costruisce una formula appropriata ottenuta legando con una congiunzione le lettere da A a D, negate se il loro valore di verità per quella riga è F, senza negazione se il loro valore di verità per quella riga è V.

- riga 3: $\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$
- riga 7: $\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D$
- riga 8: $\neg A \wedge B \wedge C \wedge D$
- riga 11: $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$
- riga 15: $A \wedge B \wedge C \wedge \neg D$
- riga 16: $A \wedge B \wedge C \wedge D$

Si mettono adesso in disgiunzione le formule appena trovate, ottenendo:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee \\ (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

A questo punto, si applicano le regole di inferenza note per semplificare la formula:

- raccogliendo $\neg A \wedge B \wedge C$ nel secondo e terzo congiunto (formule corrispondenti alle righe 7 e 8) si ottiene:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge (\neg D \vee D)) \vee \\ (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

- applicando la legge del terzo escluso a $\neg D \vee D$:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C \wedge \top) \vee \\ (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

- poiché \top è l'elemento neutro della congiunzione:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee \\ (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D)$$

- procedendo in maniera analoga, raccogliendo $A \wedge B \wedge C$ negli ultimi due congiunti e semplificando:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

- raccogliendo $B \wedge C$ nel secondo e quarto congiunto e semplificando:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C)$$

- raccogliendo $\neg B \wedge C \wedge \neg D$ nel primo e secondo congiunto e semplificando:

$$(\neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C)$$

La formula $(\neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C)$ va già bene come soluzione dell'esercizio. Tuttavia è possibile fare di meglio. Applicando la legge di assorbimento, sappiamo che $B \wedge C$ è equivalente a $(B \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge \neg D)$ (dove al posto di $\neg D$ possiamo mettere qualunque cosa, ma a noi fa comodo mettere $\neg D$). Quindi otteniamo:

- usando la legge di assorbimento, come visto sopra:

$$(\neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge \neg D)$$

- raccogliendo $C \wedge \neg D$ nel primo e ultimo congiunto e semplificando:

$$(C \wedge \neg D) \vee (B \wedge C)$$

e questa è la formula più semplice che è possibile ottenere.

Esercizio 2 (8 punti)

Determinare una segnatura adeguata e tradurre le seguenti proposizioni in forma logica.

1. Marco è un sottoposto di Carla e lavora nel settore ricerca
2. C'è qualcuno che ha Carla come sottoposta
3. Tutti coloro che sono sottoposti di Carla e Lucia sono anche sottoposti di Marco
4. Nessuno è sottoposto di se stesso
5. I sottoposti dei sottoposti di un persona sono sottoposti di quella persona
6. Chiunque abbia un sottoposto che lavora nel settore ricerca ha anche un sottoposto che non lavora nel settore ricerca.

Successivamente, trovare una interpretazione con almeno 4 individui che sia un modello delle formule che avete determinato.

Soluzione

Passo 1

Prima di tutto dobbiamo stabilire quali sono gli individui e i predicati che compaiono nelle proposizioni.

- gli individui: Marco, Carla, Lucia
- i predicati: il predicato unario “lavorare nel settore ricerca” e il predicato binario “essere sottoposto di”.

Ora si stabilisce, una volta per tutte le formule che andremo a scrivere, la segnatura utilizzata e in che maniera i simboli che introduciamo corrispondono a individui e predicati individuati prima. Decidiamo di usare:

- i simboli m, c, l come costanti individuali (la scelta è arbitraria, si è deciso di usare queste tre lettere solo perché sono le iniziali di Marco, Carla e Lucia);
- i simboli di predicato $R/1$ (che sta per “lavorare nel settore ricerca”) e $S/2$ (che sta per “essere sottoposto di”)

Volendo essere più formali (ma non è necessario) potremmo scrivere $\Sigma = (\{m, c, l\}, \{R/1, S/2\})$.

Passo 2

Ora dobbiamo trascrivere le proposizioni qui sopra in forma logica, usando la segnatura determinata al passo precedente. Vi ricordo che è utile, come primo passo, trasformare tutti i quantificatori nelle forme “per ogni x ” ed “esiste x tale che”. Lo facciamo qui a scopo didattico, ma non è necessario evidenziare tutti i passaggi nella soluzione.

1. Marco è un sottoposto di Carla e lavora nel settore ricerca
↓ (non ci sono quantificatori)
 $Smc \wedge Rm$
2. C'è qualcuno che ha Carla come sottoposta
↓ (evidenziamo la forma logica del quantificatore “c'è qualcuno”)
Esiste x tale che x ha Carla come sottoposta
↓

Esiste x tale che Carla è sottoposta di x

↓

$\exists x S_{cx}$

3. *Tutti coloro che sono sottoposti di Carla e Lucia sono anche sottoposti di Marco*

↓ (evidenziamo la forma logica del quantificatore “tutti coloro che”)

Per ogni x, se x è sottoposto di Carla e x è sottoposto di Lucia allora x è sottoposto di Marco

↓

$\forall x (S_{xc} \wedge S_{xl} \rightarrow S_{xm})$

4. *Nessuno è sottoposto di se stesso*

↓ (evidenziamo la forma logica del quantificatore “nessuno”)

non esiste x tale che x è sottoposto di se stesso

↓ (“se stesso” non è altro che x)

non esiste x tale che x è sottoposto di x

↓

$\neg \exists x S_{xx}$

Notare che anche $\forall x \neg S_{xx}$ è una risposta corretta, perché le due formule sono equivalenti.

5. *I sottoposti dei sottoposti di un persona sono sottoposti di quella persona*

↓ (“una persona” qui gioca il ruolo di un quantificatore universale, perché sta per una persona qualunque)

Per ogni x, i sottoposti dei sottoposti di x sono sottoposti di x

↓ (c'è un altro quantificatore universale: “i sottoposti dei sottoposti” sta per “tutti i sottoposti dei sottoposti”)

Per ogni x, per ogni y, se y è un sottoposto dei sottoposti di x, allora y è sottoposto di x

↓ (“y è un sottoposto dei sottoposti di x” vuol dire “y è un sottoposto di uno qualunque dei sottoposti di x”, celando quindi un quantificatore esistenziale)

Per ogni x, per ogni y, se esiste z tale che y è un sottoposto di z e z è un sottoposto di x, allora y è un sottoposto di x

↓

$\forall x \forall y (\exists z (S_{yz} \wedge S_{zx}) \rightarrow S_{yx})$

Notare che anche $\forall x \forall y \forall z (S_{yz} \wedge S_{zx} \rightarrow S_{yx})$ va bene, perché è equivalente alla formula precedente.

6. *Chiunque abbia un sottoposto che lavora nel settore ricerca ha anche un sottoposto che non lavora nel settore ricerca.*

↓ (evidenziamo la forma logica di “chiunque”)

Per ogni x, se x ha un sottoposto che lavora nel settore ricerca, x ha anche un sottoposto che non lavora nel settore ricerca

↓ (evidenziamo la forma logica delle due occorrenze di “ha un sottoposto”)

Per ogni x, se esiste y tale che y è un sottoposto di x e y lavora nel settore ricerca, allora esiste z tale che z è un sottoposto di x e z non lavora nel settore ricerca

↓

$\forall x ((\exists y S_{yx} \wedge R_y) \rightarrow (\exists y S_{zx} \wedge \neg R_z))$

Riepiloghiamo qui le formule che abbiamo ottenuto:

1. $S_{mc} \wedge R_m$

2. $\exists x Scx$
3. $\forall x (Sxc \wedge Sxl \rightarrow Sxm)$
4. $\neg \exists x Sxx$
5. $\forall x \forall y (\exists z (Syz \wedge Szx) \rightarrow Syx)$
6. $\forall x ((\exists y Syx \wedge Ry) \rightarrow (\exists y Szx \wedge \neg Rz))$

Passo 3 (soluzione a)

Adesso dobbiamo fornire un'interpretazione per le formule che abbiamo appena trovato.

Attenzione, l'interpretazione è per le formule trovate al passo 2, non per le proposizioni iniziali. Le proposizioni iniziali sono infatti già le formule con una specifica interpretazione ($m \mapsto$ Marco, $R \mapsto$ "lavorare nel settore ricerca", etc...)

Fissiamo un dominio. Per quanto specificato nel testo, il dominio deve avere almeno 4 elementi. Proprio per evidenziare il fatto che stiamo interpretando le formule e non le proposizioni iniziali, useremo per il dominio i numeri da 1 a 4, ovvero $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ora fissiamo l'interpretazione delle costanti individuali, ovvero m , l e c . Dobbiamo far corrispondere un numero ad ognuno di queste. In teoria, lo stesso numero potrebbe corrispondere a più di una costante, ma non c'è nessun motivo per farlo e potrebbe ingenerare confusione, per cui assegniamo semplicemente un numero diverso ad ogni costante:

$$m \mapsto 1 \quad c \mapsto 2 \quad l \mapsto 3$$

Notare che non c'è nessuna costante assegnata al numero 4, ma questo non è assolutamente un problema: come non tutto ciò che esiste nell'universo ha un nome proprio, non tutti gli elementi del dominio hanno una costante (nome) che li individua.

Infine dobbiamo determinare l'interpretazione per le costanti predicative S ed R . Normalmente, un buon modo di procedere è partire dall'interpretazione in cui $S \mapsto \{\}$, $R \mapsto \{\}$ (non c'è nessuna relazione tra gli elementi del dominio... volendo tornare per un attimo all'esempio da cui siamo partiti, è come se nessuno fosse sottoposto di nessuno e nessuno lavorasse nel settore ricerca). Dopo di che, si analizzano le formule una alla volta e si inseriscono quando necessario nuovi elementi in S ed R , stando attenti che l'aggiunta di qualche nuovo elemento non falsifichi una formula che era vera in precedenza.

$$S \mapsto \{\} \quad R \mapsto \{\}$$

$Smc \wedge Rm$: perché sia vera, la coppia (1, 2) deve essere nella relazione S (vi ricordo che $m \mapsto 1$ ed $c \mapsto 2$) e l'elemento 1 deve godere nella proprietà R .

$$S \mapsto \{(1, 2)\} \quad R \mapsto \{1\}$$

$\exists x Scx$: l'elemento 2 deve stare nella relazione S con qualcosa. Scegliamo di usare il numero 4, ottenendo:

$$S \mapsto \{(1, 2), (2, 4)\} \quad R \mapsto \{1\}$$

$\forall x (Sxc \wedge Sxl \rightarrow Sxm)$: la formula dice che se c'è un elemento (x, 2) e un elemento (x, 3) in S , per un x qualunque, allora deve esserci anche (x, 1). Siccome non c'è nessuna coppia (x, 3) in S , la formula è già banalmente vera.

$\neg \exists x Sxx$: anche questa è già vera perché non c'è nessuna coppia di elementi uguali in S .

$\forall x \forall y (\exists z (Syz \wedge Szx) \rightarrow Syx)$: poiché abbiamo le coppie (1,2) e (2,4) in S , per rendere vera la formula dobbiamo aggiungere anche (1,4).

$$S \mapsto \{(1, 2), (2, 4), (1, 4)\} \quad R \mapsto \{1\}$$

$\forall x ((\exists y Syx \wedge Ry) \rightarrow (\exists y Szx \wedge \neg Rz))$: poiché (1, 2) e (1,4) stanno in S , ed 1 sta in R , bisogna aggiungere delle nuove coppie (x, 2) e (x, 4) con x che non sta in R . Aggiungiamo quindi (3, 2) e (3, 4), ottenendo:

$$S \mapsto \{(1, 2), (2, 4), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\} \quad R \mapsto \{1\}$$

Bisognerebbe ora verificare che le formule di prima continuano ad essere vere in questa interpretazione, cosa che però risulta vera abbastanza facilmente.

Dunque l'interpretazione richiesta è:

$$S \mapsto \{(1, 2), (2, 4), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\} \quad R \mapsto \{1\}$$

Passo 3 (soluzione b)

Se il modo di ragionare di prima vi sembra troppo astratto, potete provare a risolvere l'esercizio pensando comunque all'interpretazione originaria (S = "essere sottoposto di", R ="lavorare nel settore ricerca"). Proviamo a procedere in questo modo.

Per il dominio, riutilizziamo le 3 persone citate nel testo (Marco, Carla, Lucia) a cui aggiungiamo una quarta persona (diciamo Paolo) per soddisfare le specifiche dell'esercizio. Abbiamo quindi $D = \{\text{Marco, Carla, Lucia, Paolo}\}$.

Per l'interpretazione delle costanti individuali, riusciamo la stessa che abbiamo adoperato per passare dalle proposizioni in italiano alle formule, ovvero

$$m \mapsto \text{Marco} \quad c \mapsto \text{Carla} \quad l \mapsto \text{Lucia}$$

Per l'interpretazione delle costanti predicative, quello che dobbiamo fare è specificare per S l'insieme di tutte le coppie (sottoposto, capo) che intendiamo siano vere, e per R l'insieme di tutte le persone che vogliamo lavorino nel settore ricerca. Si tratta, in altri termini, di immaginare una organizzazione dei lavoratori che soddisfi tutte le proposizioni.

Come nella soluzione a, immaginiamo di partire da una situazione in cui $S \mapsto \{\}, R \mapsto \{\}$, ovvero nessuno è sottoposto di nessun altro e nessuno lavora nel settore ricerca. Dopo di che, si analizzano le formule una alla volta e si inseriscono quando necessario nuovi elementi in S ed R , stando attenti che l'aggiunta di qualche nuovo elemento non falsifichi una formula che era vera in precedenza.

$$S \mapsto \{\} \quad R \mapsto \{\}$$

$Smc \wedge Rm$: perché sia vera, Marco deve essere sottoposto di Carla e Marco deve lavorare nel settore ricerca. Otteniamo:

$$S \mapsto \{(\text{Marco, Carla})\} \quad R \mapsto \{\text{Marco}\}$$

$\exists x Scx$: perché sia vera, qualcuno deve essere il capo di Carla. Diciamo che è Paolo.

$$S \mapsto \{(\text{Marco, Carla}), (\text{Carla, Paolo})\} \quad R \mapsto \{\text{Marco}\}$$

$\forall x (Sxc \wedge Sxl \rightarrow Sxm)$: siccome non c'è nessun sottoposto di Lucia, questa formula è già vera.

$\neg \exists x Sxx$: siccome non c'è nessuno che è sottoposto di se stesso, questa formula è già vera.

$\forall x (Sxc \wedge Sxl \rightarrow Sxm)$: poiché Marco è sottoposto di Carla e Carla è sottoposto di Paolo, allora Marco deve essere sottoposto di Paolo.

$S \mapsto \{(\text{Marco}, \text{Carla}), (\text{Carla}, \text{Paolo}), (\text{Marco}, \text{Paolo})\}$ $R \mapsto \{\text{Marco}\}$

$\forall x ((\exists y Syx \wedge Ry) \rightarrow (\exists y Szx \wedge \neg Rz))$: poiché Marco è sottoposto di Carla e Paolo, e lavora nel settore ricerca, bisogna che ci siano altri sottoposti di Carla e Paolo che non lavorano nel settore ricerca. Possiamo usare Lucia a questo scopo. Otteniamo:

$S \mapsto \{(\text{Marco}, \text{Carla}), (\text{Carla}, \text{Paolo}), (\text{Marco}, \text{Paolo}), (\text{Lucia}, \text{Carla}), (\text{Lucia}, \text{Paolo})\}$

$R \mapsto \{\text{Marco}\}$

Bisognerebbe ora verificare che le formule di prima continuano ad essere vere in questa interpretazione, cosa che però risulta abbastanza facilmente.