

Esame del modulo di Logica

Insegnamento di Fondamenti di Informatica

a.a. 2023/2024 – 19 febbraio 2024

Esercizio 1 (8 punti)

Tradurre in forma logica proposizionale la seguente inferenza, e determinare se è corretta.

Paolo va a Londra se ha il passaporto e la patente. Condizione necessaria perché Paolo abbia la patente è che sia maggiorenne. Pertanto, se Paolo non è maggiorenne non va a Londra.

Soluzioni

Utilizziamo le seguenti lettere proposizionali per indicare le rispettive proposizioni semplici:

- L : Paolo va a Londra
- P : Paolo ha il passaporto
- R : Paolo ha la patente
- M : Paolo è maggiorenne

L'inferenza è quindi una istanza della seguente regola:

$$\frac{P \wedge R \rightarrow L \quad R \rightarrow M}{\neg M \rightarrow \neg L}$$

Per verificare se la regola è corretta, usiamo le tavole di verità:

L	P	R	M	$P \wedge R$	$P \wedge R \rightarrow L$	$R \rightarrow M$	$\neg M$	$\neg L$	$\neg M \rightarrow \neg L$
F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V

Dalla tabella è evidente che l'inferenza è falsa. Infatti, esiste almeno una riga (quella evidenziata in rosso) in cui entrambe le premesse sono vere ma la conseguenza è falsa.

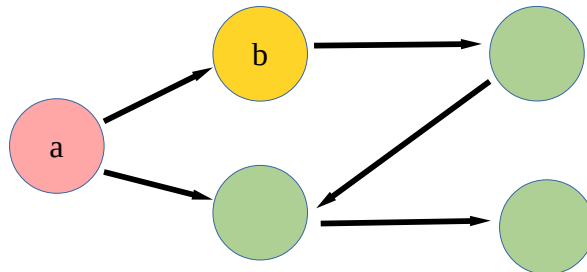
Osservazioni

Queste osservazioni sono solo a scopo didattico e non fanno parte della soluzione dell'esercizio (ovvero, non mi aspetto che la vostra risposta le contenga).

- “Paolo va a Londra se ha il passaporto e la patente” viene rappresentato da $P \wedge R \rightarrow L$ e non da $L \rightarrow P \wedge R$. La cosa è più chiara se raddrizziamo la frase in italiano, ottenendo “se Paolo ha il passaporto e la patente, (allora) Paolo va a Londra”
- “Condizione necessaria perché Paolo abbia la patente è che sia maggiorenne” viene rappresentata da $R \rightarrow M$ e non da $M \rightarrow R$. Infatti, poiché essere maggiorenne è la condizione necessaria, vuol dire che quando Paolo ha la patente, necessariamente deve essere maggiorenne, ovvero avere la patente implica essere maggiorenne.

Esercizio 2 (8 punti)

Si consideri il seguente disegno (chiamato tecnicamente *grafo*) costituito da cerchi (chiamati *nodi*) e frecce.



Sia data una segnatura Σ con simboli di costante $\{a, b\}$ e simboli di predicato $\{P/1, Q/2\}$.

L'interpretazione \mathcal{I} sulla segnatura Σ è definita come segue (facendo riferimento al grafo di sopra):

- il dominio è l'insieme dei 5 nodi nel grafo;
- $\mathcal{I}(a)$ e $\mathcal{I}(b)$ sono i nodi etichettati come tali;
- $\mathcal{I}(P) = \{x \mid x \text{ è verde}\}$
- $\mathcal{I}(Q) = \{(x, y) \mid c'è \text{ una freccia che parte dal nodo } x \text{ e arriva al nodo } y\}$

Basandosi sulla interpretazione \mathcal{I} , tradurre in italiano (il più possibile naturale) le seguenti formule, e determinare il loro valore di verità. A titolo di esempio, $Pa \wedge \exists x Qax$ si potrebbe tradurre in “il nodo a è verde e c' è un nodo al quale arriva una freccia che parte dal nodo a ” o, più semplicemente, “il nodo a è verde e c' è una freccia che parte dal nodo a ”.

1. $\neg Pa \wedge Qba$
2. $\forall x \neg Qxx$
3. $\forall x (\neg Px \rightarrow \exists y Qxy)$
4. $\forall x (\neg Px \rightarrow \exists y Qyx)$
5. $\exists x \forall y (Qyx \rightarrow Py)$

Soluzioni

Esaminiamo le formule una alla volta:

1. *Il nodo a non è verde e c'è una freccia che parte dal nodo b e arriva al nodo a.*

Questa formula è falsa, perché sebbene $\neg Pa$ sia vero (il nodo a effettivamente non è verde ma rosso), non esiste nessuna freccia da b ad a.

2. *Nessun nodo ha una freccia che parte da esso e arriva su se stesso.*

Questa formula è vera, perché tutte le frecce partono da un nodo e arrivano su un nodo differente.

3. *Tutti i nodi non verdi hanno una una freccia che parte da loro.*

È vera perché sia il nodo a che il nodo b hanno delle frecce in partenza.

4. *Tutti i nodi non verdi hanno una una freccia che arriva a loro.*

È falsa, perché il nodo a non ha nessuna freccia in arrivo

5. *C'è almeno un nodo tale che tutte le frecce che arrivano a quel nodo partono da nodi verdi*

Vero, in particolare esistono due nodi che hanno questa proprietà. Quello in basso a destra (ha una sola freccia in arrivo che parte da un nodo verde), e il nodo a (che non ha nessuna freccia in arrivo).

Osservazioni

Si può disquisire su cosa voglia dire esattamente “il più possibile naturale” nel testo dell’esercizio, ma sicuramente una proposizione in italiano che contiene delle variabili non è naturale. Quindi traduzioni del tipo “Per ogni nodo x , se x non è verde esiste un nodo y tale che c'è una freccia che parte da x e arriva a y ” (per la 3° formula) non sono assolutamente accettabili come risposte.