Connettivi

prof. Gianluca Amato

19 ottobre 2024

Proposizioni semplici e composte

Abbiamo visto nella lezione introduttiva che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la forma logica delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la stuttura di una proposizione.

Definizione (Proposizioni semplici e composte)

Una proposizione si dice semplice se non contiene al suo interno una parte che è a sua volta una proposizione; in caso contrario si dice composta.

Esempio (Proposizioni semplici)

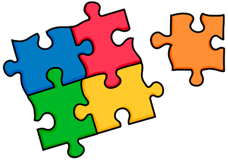
Carlo è ligure
Carlo è più alto di Mario
Tutti gli uomini sono mortali

Esempio (Proposizioni composte)

Non è vero che Carlo è ligure
Marcello è matematico o fisico
Se manca la benzina, l'auto non parte

Definizione (Connettivo)

Un connettivo è un elemento grammaticale che collega un certo numero di proposizioni tra di loro per formare una nuova proposizione.



Esempio

- Roma è la capitale d'Italia e Lione è la capitale della Francia
- Roma è la capitale d'Italia oppure Lione è la capitale della Francia
- Se Roma è la capitale d'Italia allora Lione è la capitale della Francia
- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia.

Logica delle proposizioni

Le proposizioni interne hanno una loro struttura interna:

- Carlo è ligure afferma che un certo *indiviuduo* (Carlo) gode di una certa proprietà (essere ligure).
- Carlo è più alto di Mario afferma che c'è una *relazione* (essere più alto di) tra Carlo e Mario.
- Tutti gli uomini sono mortali ha una struttura complessa e contiene il quantificatore *tutti*.

Nella prima parte del corso ci occuperemo della logica delle proposizioni, detta anche logica proposizionale o logica enunciativa:

- studia la relazione che intercorre tra le proposizioni;
- ma ignore la struttura interna delle proposizioni semplici.

Nella seconda parte del corso ci occuperemo della logica dei predicati, che si occupa di indagare anche la struttura interna delle proposizioni semplici.

Contenuti

Negazione

La negazione trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- "non è vero che" prima della proposizione da negare
- "non" prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

- Non è vero che Roma è la capitale d'Italia (✗)
- Roma non è la capitale d'Italia (✗)

Dante Alighieri ha scritto "I Promessi Sposi" (✗)

- Non è vero che Dante Alighieri ha scritto "I Promessi Sposi" (✓)
- Dante Alighieri non ha scritto "I Promessi Sposi" (✓)

Dettagli sulla negazione

Simboli usati per scrivere la negazione:

- $\neg$ (in logica)
- not (in inglese, Python e C++)
- ! (in C, C++, Java, ecc.)
- un trattino sopra la proposizione da negare (reti logiche)

È possibile descrivere il comportamento della negazione con una tavola di verità.

A	$\neg A$
F	V
V	F

Contenuti

Congiunzione

La congiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con la parola "e".

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Parigi è la capitale della Francia (✓)

- Roma è la capitale d'Italia e Parigi è la capitale della Francia (✓)

$2+2=4$ (✓)
$3\times 2=5$ (✗)

- $2+2=4$ e $3\times 2=5$ (✗)

Congiunzione nella lingua italiana (1)

Talvolta in italiano si cerca di evitare le ripetizioni, e il connettivo e non si trova più tra due proposizioni.

Esempio

Carlo e Maria sono appassionati di baseball

è una abbreviazione di

Carlo è appassionato di baseball e Maria è appassionata di baseball

Esempio

La partita è avvincente e combattuta

è una abbreviazione di

La partita è avvincente e la partita è combattuta

Congiunzione nella lingua italiana (2)

Ma attenzione!!! Non tutti gli usi della parola e sono istanze della congiunzione.

Esempio

Carlo e Maria sono amici

non è una abbreviazione di

Carlo è amico e Maria è amica

Di contro, talvolta la congiunzione è resa da parole diverse da e, ad esempio da ma (che non per nulla si chiama congiunzione avversativa)

Esempio

Roma è la capitale d'Italia ma Parigi è la capitale della Francia

Dettagli della congiunzione

Simboli usati per scrivere la congiunzione sono:

- $\wedge$ (in logica)
- and (in inglese, Python e C++)
- && (in C, C++, Java, ecc.)
- $\cdot$ (nelle reti logiche, spesso omesso come in algebra)

Questa è la tavola di verità della congiunzione:

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Doppia lettura della tavola di verità

In realtà la tavola di verità la si può leggere in due modi:

- da sinistra a destra: se sappiamo il valore di verità delle proposizioni di base, possiamo determinare il valore di verità della proposizione risultante.

  A è vera e B è falsa $\longrightarrow$ $A \wedge B$ è falsa.

- da destra a sinistra: se sappiamo il valore di verità della proposizione composta, possiamo determinare quasi sono le possibili combinazioni di valori di verità delle proposizioni di base.

  $A \wedge B$ è vera $\longrightarrow$ c'è una sola possibilità:

  - A vera, B vera

  $A \wedge B$ è falsa $\longrightarrow$ ci sono tre possibilità:

  - A falsa, B falsa
  - A falsa, B vera
  - A vera, B falsa

Contenuti

Connettivi vero funzionali

Definizione (Connettivi vero-funzionali)

Un connettivo si dice vero-funzionale se il valore di verità della proposizione risultante dipende solo dal valore di verità delle proposizioni di partenza.

- Se un connettivo è vero-funzionale, possiamo descriverlo con la sua tavola di verità, altrimenti no.
- I connettivi visti finora sono tutti vero-funzionali.
- I connettivi che vedremo in futuro saranno vero-funzionali.

Esempio di connettivo non vero-funzionale

Consideriamo il connettivo mentre, ad esempio nella proposizione:

- Lucia ha mangiato una mela mentre mentre ha guardato la televisione.

Quale sarebbe la tavola di verità di questo connettivo ?

A	B	A *mentre* B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	?

Non possiamo riempire l'ultima riga della tabella: Lucia ha guardato la TV e mangiato, ma lo ha fatto nello stesso momento o in momenti diversi ?

Contenuti

Disgiunzione

La disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando una delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con "o" ed "oppure".

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)
Roma è la capitale della Francia (✗)

- Roma è la capitale d'Italia o Roma è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia oppure Roma è la capitale della Francia (✓)
- O Roma è la capitale d'Italia oppure Roma è la capitale della Francia (✓)

$2+2=5$ (✗)
$3\times 2=7$ (✗)

- $2+2=5$ oppure $3\times 2=7$ (✗)

Disgiunzione nella lingua italiana

Consideriamo un esempio simile a quello di prima:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Lione è la capitale della Francia

È una proposizione piuttosto strana. Nella lingua italiana, utilizziamo la disgiunzione quasi sempre quando le due proposizioni sono strettamente correlate tra di loro, come in:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Roma è la capitale della Francia

Spesso, in questi casi, abbreviamo la frase, come già visto per la congiunzione

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o della Francia

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva (1)

Consideriamo ancora una proposizione un po' innaturale:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o Parigi è la capitale della Francia

Cosa ne pensate ? È vera o falsa ?

- se per voi la frase è **vera**, vuol dire che considerate la "o" in senso inclusivo
  - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è vera;
  - la disgiunzione inclusiva è vera quando almeno una delle proposizioni di base è vera;
- se per voi la frase è **falsa**, vuol dire che considerate la "o" in senso esclusivo
  - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è falsa;
  - per voi la "o" introduce una alternativa tra due possibilità, una delle quali deve essere falsa;
  - la disgiunzione esclusiva è vera quando esattamente una delle proposizioni di base è vera.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva (2)

Abbiamo detto prima che la disgiunzione collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In realtà siamo stati imprecisi. Dovremmo dire:

Definizione (Disgiunzione inclusiva)

La disgiunzione inclusiva collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **almeno una** delle proposizioni di partenza è vera.

Definizione (Disgiunzione esclusiva)

La disgiunzione esclusiva collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **esattamente una** delle proposizioni di partenza è vera.

Dettagli della disgiunzione inclusiva

Simboli usati per scrivere la disgiunzione sono:

- $\vee$ (in logica)
- or (in inglese, Python e C++)
- || (in C, C++, Java, ecc.)
- $+$ (nelle reti logiche)

Questa è la tavola di verità della disgiunzione:

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V (perché inclusiva)

Dettagli della disgiunzione esclusiva

Simboli usati per scrivere la disgiunzione esclusiva:

- $\underline{\vee}$ in queste slide e nel libro di testo, ma non è una notazione standard
- xor (in gergo informatico)
- **!=** (in Python, Java, C, C++, ecc.)
- $\oplus$ (nelle reti logiche)

Questa è la tavola di verità della disgiunzione esclusiva:

A	B	$A \underline{\vee} B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F (perché esclusiva)

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana (1)

Ma la "o" in italiano è inclusiva od esclusiva ?

Spesso il problema non si pone perché, dal contesto, sappiamo che le due proposizioni non possono essere entrambe vere.

Esempio

Se sapete che

- La capitale della California è Sacramento o Los Angeles.

vuol dire che possono essere entrambe capitali ?

Ovviamente no, perché sappiamo che uno stato non può avere due capitali, ma se questa "impossibilità" dettata dal contesto viene meno ?

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana (2)

Esempio

Se sapete che

- La bandiera della California contiene una stella o un orso.

vuol dire che la bandiera può avere entrambe ?

Dipende se la o è stata usata in senso inclusivo o esclusivo.

In latino esistono due disgiunzioni, per distinguere i due casi: vel per quella inclusiva e aut per quella esclusiva. In italiano, se volete essere precisi, potete aggiungere

- o entrambi, per indicare l'interpretazione inclusiva;
- ma non entrambi, per indicare l'interpretazione esclusiva.

Ad esempio:

- La bandiera della California contiene una stella o un orso o entrambi.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nella lingua italiana (3)

In generale, nella lingua di tutti i giorni, non è chiaro se "o" e "oppure" vadano intesi in senso inclusivo o esclusivo.

Tuttavia, in linea di massima:

- se la disgiunzione è l'unico connettivo, essa è tipicamente esclusiva.

  Se la mamma dice al figlio

  - Puoi comprare un gelato o un pasticcino

  intende uno dei due, non entrambi.

- se la disgiunzione appare nell'antecedente di una implicazione (vedremo dopo di cosa si tratta), è tipicamente inclusiva.

  Data la proposizione

  - se sono laureato in economia o in informatica sono ammesso al concorso

  ovviamente si intende che sono amemsso anche se ho entrambe le lauree.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva nei testi scientifici

In matematica, informatica e nelle scienze sperimentali, le parole "o" e "oppure" vanno sempre interpretate in maniera inclusiva. Pertanto:

- la proposizione "$2 + 2 = 4$ oppure 5 è dispari" è vera
- da ora poi, in mancanza di ulteriore indicazioni, le parole "o" e "oppure" saranno sempre interpretate in maniera inclusiva.

Domande dagli studenti

Riporto una domanda che mi è stata fatta a lezione:

Perché uno dovrebbe affermare "$2+2=4$ oppure 5 è dispari" invece di "$2+2=4$ e 5 è dispari"?

Ovviamente in questo caso usare "oppure" può sembrare stupido, ma solo perché sappiamo a priori che entrambe le proposizioni di base sono vere. Se introduciamo delle variabili, e scriviamo una proposizione del tipo

$$x < 4 \text{ oppure } x \text{ è pari}$$

non possiamo rimpiazzare "oppure" con "e" perché il senso della frase cambierebbe completamente.

Il fatto che la disgiunzione in matematica sia inclusiva vuol dire che per $x = 2$ la proposizione di cui sopra è vera. Se la disgiunzione fosse interpretata in maniera esclusiva, per $x = 2$ la proposizione sarebbe falsa.

In realtà "$x < 4$ oppure x è pari" si dovrebbe più correttamente chiamare *funzione proposizionale*, ma rimandiamo questo discorso a quando introdurremo la logica dei predicati.

Contenuti

Implicazione

L'implicazione, più correttamente chiamata implicazione materiale, collega due proposizioni A e B tra di loro. La proposizione risultante è sempre vera, tranne quando la prima è vera e la seconda è falsa (ricorda la definizione di correttezza di una inferenza).

Viene di solito resa in italiano con "se A allora B".

- A è chiamato antecedente;
- B è chiamato conseguente.

Simboli usati per scrivere l'implicazione:

- $\to$ (in logica) o altri simboli simili come $\Rightarrow$.

Questa è la tavola di verità della implicazione

A	B	$A \to B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Interpretazione dell'implicazione in italiano (1)

Per capire meglio l'implicazione, è utile leggere la sua tavola di verità "da destra a sinistra".

Esempio

Supponiamo di sapere per certo che

- se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa

Quali di queste condizioni si potranno verificare ?

Carla è alla festa	Luca è alla festa	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✓ (dubbi?)
V	F	✗
V	V	✓

Esattamente la tavola di verità dell'implicazione.

Interpretazione dell'implicazione in italiano (2)

Se avete dubbi sulla seconda riga della tabella di prima è perché spesso in italiamo diciamo se . . . allora ma in realtà intendiamo se e solo se (che è un altro connettivo).

Esempio

Supponiamo che un amico ci ha assicurato che:

- se piove allora vengo a prenderti in macchina

Quali di queste situazioni possono verificarsi (se l'amico mantiene la promessa, cioè se la proposizione di prima è vera) ?

piove	vengo a prenderti	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✓ (sono comunque sorpreso)
V	F	✗ (se accade ci resto male)
V	V	✓

Interpretazione dell'implicazione in italiano (3)

Se proviamo a interpretare la tavola di verità della l'implicazione "da sinistra verso destra", otteniamo spesso qualcosa di poco sensato.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=5 (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora 3+2=0 (✗)
- se gli elefanti volano allora 3+2=5 (✓)
- se gli elefanti volano allora 3+2=0 (✓)

Implicazione e rapporti di causa-effetto

Queste proposizioni sono abbastanza innaturali. Questo perché in italiano quasi sempre l'uso del se . . . allora suggerisce un rapporto di causa-effetto tra antecedente e conseguente.

Esempio

Quando diciamo "se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa" intendiamo che c'è qualche rapporto di causa-effetto tra le due cose.

L'implicazione che trattiamo noi prescinde da ogni rapporto di causa-effetto ed analizza solo lo stato delle cose. Per questo, per distinguerla da altri usi dell'implicazione, la chiamiamo *implicazione materiale*.

Implicazione e quantificazione implicita

In molti usi del se . . . allora c'è una quantificazione implicita.

Dicendo "se il cielo è nuvoloso allora piove":

- quello che intendo è che "in qualunque istante t, se in t c'è tempo nuvoloso allora in t piove";
- pertanto, la proposizione è falsa, perché non è detto che se è nuvoloso deve per forza piovere;
- se volessimo "spogliare" la frase dal quantificatore implicito, la frase sarebbe vera in alcuni istanti e falsa in altri.

Implicazione e linguaggio naturale (2)

In conclusione,

- l'implicazione nel linguaggio naturale è spesso diversa dall'implicazione materiale;
- non a caso in Python (e in altri linguaggi di programmazione) esistono gli operatori logici `and`, `or`, `not` ma non esiste una operazione per l'implicazione.

- l'implicazione materiale è molto usata in matematica, ma quasi sempre in presenza di variabili:
  - è difficile trovare affermazioni del tipo "se 8 è divisibile per 4 allora 8 è divisibile per 2";
  - è molto più normale trovare "se x è divisibile per 4 allora x è divisibile per 2".

Ad ogni modo,

- nello studio della logica, e quindi in tutto il resto del corso, tutte le volte in cui compare se ... allora esso va interpretato come implicazione materiale;
- anche quando la trasposizione in logica non è fedele al senso comune.

Altre forme dell'implicazione in linguaggio naturale (1)

L'implicazione, nel linguaggio naturale, compare spesso in forme diverse rispetto al se . . . allora, non sempre immediate da interpretare.

Nella tabella seguente, potete pensare ad A come "x è divisibile per 4" ed B come "x è divisibile per 2". Stiamo un po' barando perché non si tratta di proposizioni bensì di funzioni proposizionali, ma in questo contesto non cambia nulla.

proposizione in italiano	proposizione in simboli
se A allora B	$A \to B$
A se B	$B \to A$
A solo se B	$A \to B$
da A segue B	$A \to B$
A implica B	$A \to B$
A è condizione sufficiente per B	$A \to B$
A è condizione necessaria per B	$B \to A$
condizione sufficiente per A è B	$B \to A$
condizione necessaria per A è B	$A \to B$

Altre forme dell'implicazione in linguaggio naturale (2)

In generale, non dovete imparare la tabella a memoria, ma imparare a distinguere quale evento (antecedente) genera quale conseguenza (conseguente).

Alcune osservazioni:

- A se B: è solo un modo contorno di scrivere "se B allora A", ovvero $B \to A$.
- A solo se B: vuol dire che A si può verificare solo se si verifica anche B. Quindi, non appare sappiamo che A è vero, per forza dever essere vero anche B, ovvero $A \to B$.
- A è condizione sufficiente per B: vuol dire che il verificarsi di A è sufficiente, da solo senza nessun'altra informazione, a causare anche B, quindi $A \to B$.
- A è condizione necessaria per B: vuol dire che perché si verifichi B deve necessariamente verificarsi A. Quindi, non appiamo sappiamo che B è vero, A deve essere pure vero. In sostanza, $B \to A$.
- condizione sufficiente per A è B: è un modo un po' contorto di scrivere "B è condizione sufficiente per A", quindi $B \to A$.
- condizione necessaria per A è B: è un modo un po' contorto di scrivere "B è condizione necessaria per A", ovvero $A \to B$

Contenuti

Doppia implicazione

La doppia implicazione collega due proposizioni tra di loro, ed è vera quando le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità.

In italiano è di solito resa con se e solo se o con è condizione necessaria e sufficiente per.

Simboli usati per scrivere la doppia implicazione:

- $\leftrightarrow$ (in logica) o simboli simili come $\Leftrightarrow$:
- == (in Python, C, C++, Java, ecc.)

Questa è la tavola di verità della doppia implicazione

A	B	$A \leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Interpretazione della doppia implicazione in italiano (1)

Tutti i problemi di corrispondenza tra implicazione e linguaggio naturale continuano a valere per la doppia implicazione. Come sempre, l'interpretazione più semplice è con la lettura "da destra a sinistra".

Esempio

Supponiamo che un amico ci abbia assicurato che:

- vengo a prenderti in macchina se e solo se piove

A parte il fatto che il vostro amico parla in maniera un po' strana... quali di queste situazioni possono verificarsi (se l'amico mantiene la promessa, cioè se la proposizione di prima è vera) ?

vengo a prenderti	piove	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✗
V	F	✗
V	V	✓

Interpretazione della doppia implicazione in italiano (2)

Nella lettura "da sinistra a destra" si ottengono sempre cose bizzarre.

Esempio (Vero o falso?)

- Roma è la capitale d'Italia se e solo se 3+2=5 ($\checkmark$)
- Roma è la capitale d'Italia se e solo se 3+2=0 (✗)
- gli elefanti volano se e solo se 3+2=5 (✗)
- gli elefanti volano se e solo se 3+2=0 ($\checkmark$)