Le forme proposizionali

prof. Gianluca Amato

6 novembre 2024

Contenuti

Forme proposizionali

Usando le lettere A, B, C etc..., i connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e le parentesi tonde, è possibile costruire delle espressioni chiamate forme proposizionali (abbreviata in fp) o anche formule proposizionali
Indicheremo le fp con le lettere X, Y, etc...

Esempio (Forme proposizionali)

$\neg(A \wedge \neg B)$ $\quad$ $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ $\quad$ $A \vee \neg(B \wedge C)$

È possibile ottenere delle proposizioni rimpiazzando le lettere proposizionali:

Esempio (dalle forme proposizionali alle proposizioni)

Considerate la forma proposizionale $(A \vee B) \rightarrow C$. Allora se

- $A =$ Carlo è laureato in economia
- $B =$ Carlo è laureato in informatica
- $C =$ Carlo è ammesso al concorso

otteniamo

- Se Carlo è laureato in economia o in informatica, allora è ammesso al concorso.

Calcolo del valore di verità di una forma proposizionale

Possiamo pensare alle forme proposizionali come espressioni algebriche che usano i valori vero e falso invece dei numeri. Se assegnamo un valore di verità alle lettere, è possibile calcolare il valore di verità della forma proposizionale.

Esempio (Calcolo valore di verità)

Consideriamo la forma proposizionale $(A \vee B) \to C$. Se

- $A =$ vero
- $B =$ falso
- $C =$ vero

allora

- $(A \vee B) \to C = (\text{vero} \vee \text{falso}) \to \text{vero} = \text{vero} \to \text{vero} = \text{vero}$

Parentesi e precedenze (1)

Le parentesi, come nelle espressioni algebriche, servono ad evitare le ambiguità:

Esempio (Ambiguità)

Consideriamo:

- $A \to B \wedge C$
- $A =$ falso, $B =$ vero $C =$ falso

. La fp ha due interpretazioni, con due risultati diversi:

- $(A \to B) \wedge C = (\text{falso} \to \text{vero}) \wedge \text{falso} = \text{vero} \wedge \text{falso} = \text{falso}$
- $A \to (B \wedge C) = \text{falso} \to (\text{vero} \wedge \text{falso}) = \text{falso} \to \text{falso} = \text{vero}$

Precedenze

Per evitare di mettere troppe parentesi, si usano le precedenze:

- $\neg$ ha la precedenza più alta
- $\wedge$, $\vee$ e $\veebar$ hanno precedenza intermedia
- $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ hanno precedenza più bassa

Esempio (Precedenze)

- $A \rightarrow B \wedge C$ si legge $A \rightarrow (B \wedge C)$
- $\neg A \wedge B \rightarrow C$ si legge $((\neg A) \wedge B) \rightarrow C$.

Alcune parentesi sono comunque necessarie:

- $A \vee B \wedge C$ è ambigua, occorre scrivere $(A \vee B) \wedge C$ oppure $A \vee (B \wedge C)$.

Inoltre, spesso qualche parentesi in più non guasta:

- Invece di $\neg A \wedge B \rightarrow C$ meglio scrivere $(\neg A \wedge B) \rightarrow C$.

Tavole di verità per fp (1)

Quando si calcola il valore verità di una fp per tutti i possibili assegnamenti di valori di verità alle variabili proposizionali, si ottiene una tavola di verità.

Esempio (Tavola di verità di $\neg A \vee B$)

A	B	$\neg A \vee B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Tavole di verità per fp (2)

Se la fp è complessa, è possibile inserire eventuali colonne aggiuntive per formule intermedie.

Esempio (Tavola di verità di $(A \to B) \to (\neg A \to B)$)

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \to B$	$((A \to B) \to (\neg A \to B)$
F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	V	V

Nella tabella di sopra ho voluto creare una colonna per ogni sottoformula, ma ovviamente ciò non è necessario

Tavole di verità per fp (2)

È possibile disegnare la tavola di verità anche di fp con tre o più lettere proposizionali: basta non sbagliare nel considerare tutte le possibili combinazioni di valori di verità.

Esempio (Tavola di verità di $(A \to \neg C) \to (B \to \neg C)$)

A	B	C	$\neg C$	$A \to \neg C$	$B \to \neg C$	$(A \to \neg C) \to (B \to \neg C)$
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V

Enumerare tutte le possibili combinazioni (1)

Come si fa a non dimenticarsi nessuna delle possibili combinazioni di valori di verità per le lettere proposizionali?

- con n lettere proposizionali, ci sono 2^n combinazioni possibili;
- partendo dalla colonna più a destra, si alternano una (2^0) F ed una V vino ad arrivare a 2^n righe;
- quindi si passa alla colonna immediatamente a sinistra, alternando due (2^1) V e due F;
- quindi, passando alle colonne sempre più a sinistra si alternato 4 (2^2), 8 (2^3), ... V ed altrettante F fino a riempire tutte le colonne delle lettere proposizionali.

Enumerare tutte le possibili combinazioni (2)

A	B	C	D
F	F	F	F
F	F	F	V
F	F	V	F
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	F	V
F	V	V	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	F	V	V
V	V	F	F
V	V	F	V
V	V	V	F
V	V	V	V

- colonna D: una F ed una V
- colonna C: due F e due V
- colonna B: quattro F e quattro V
- colonna A: otto F e otto V

Enumerare tutte le possibili combinazioni (3)

Un metodo alternativo per non dimenticare nessuna combinazione è quella di riempiere le righe una alla volta, contando in binario, ma con F al posto di 0 e V al posto di 1.

Esempio

A	B	C	D
F	F	F	F
F	F	F	V
F	F	V	F

...

- prima riga: $0 = 0000_2$
- seconda riga: $1 = 0001_2$
- terza riga: $2 = 0010_2$

Contenuti

Tautologie(1)

Definizione (Tautologia)

Si chiama tautologia una forma proposizionale che è sempre vera, indipendentemente dal valore di verità delle lettere proposizionali che in essa compaiono.

Esempio

$A \land B \to A$ è una tautologia.

A	B	$A \land B$	$(A \land B) \to A$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

Tautologie (2)

Se una proposizione ha la forma di una tatutologia sappiamo sicuramente che è vera, anche senza conoscere il valore di verità delle proposizioni semplici che la compongono.

Esempio

"*Se Carla è italiana e laureata, allora è italiana.*" è sicuramente una proposizione vera, anche se non sappiamo chi sia Carla.

Contraddizione

Definizione (Contraddizione)

Si chiama contraddizione una forma proposizionale che è sempre falsa, indipendentemente dal valore di verità delle lettere proposizionali che in essa compaiono.

Esempio

$A \wedge \neg A$ è una contraddizione.

A	$A \wedge \neg A$
F	F
V	F

Corrisponde a proposizioni in italiano che sono sicuramente false, come

Esempio

Carla è laureata ma non è laureata.

Tautologie e contraddizioni

Ovviamente, tautologie e contraddizioni sono strettamente correlate.

Teorema

X è una tautologia se e solo se $\neg X$ è una contraddizione, e viceversa.

Osservazione

In futuro, useremo le lettere terminali dell'alfabeto come X, Y, Z per indicare una forma proposizionale, mentre useremo le lettere iniziali per le lettere proposizionali.

Tautologie notevoli: principio di non contraddizione

Il principio di non contraddizione afferma che non è possibile che una proposizione sia contemporaneamente vera e falsa.

Teorema (Principio di non contraddizione)

$\neg(A \wedge \neg A)$ *è una tautologia.*

A	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
F	F	V
V	F	V

Esempio (in italiano)

"*Carla è laureata e non è laureata* " è sicuramente falsa, anche se non sappiamo chi è Carla. Pertanto la sua negazione ."*Non è vero che Carla è laureata e non è laureata*" è sicuramente vera.

Il principio di non contraddizione è un principio fondante di praticamente qualunque tipo di logica esistente.

Tautologie notevoli: terzo escluso

Il principio del terzo escluso, noto anche col nome latino *tertium non datur*, afferma sostanzialmente che ogni proposizione è vera o falsa.

Teorema (Principio del terzo escluso)

La fp $A \vee \neg A$ è una tautologia.

A	$A \vee \neg A$
F	V
V	V

Esempio (in italiano)

"*Carla è laureata oppure non è laureata*" è sicuramente vera, anche se non sappiamo chi è Carla.

Il principio del terzo escluso, a differenze di quello di non contraddizione, non è universalmente accettato: esistono molti sistemi logici in cui non vale, anche se noi non ce ne occupiamo.

Equivalenza logica

Definizione (Equivalenza logica)

Due fp si dicono logicamente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità per ogni possibile assegnamento di valori di verità alle lettere proposizionali.

Detto in altri termini, due fp sono equivalenti se hanno la stessa tavola di verità.

Esempio

Consideriamo le fp $\neg A \leftrightarrow B$ e $A \leftrightarrow \neg B$. Mostriamo una unica tavola di verità che mostra entrambe le fp assieme

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow \neg B$
F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F

Poiché le colonne $\neg A \leftrightarrow B$ e $A \leftrightarrow \neg B$ sono uguali, le due fp sono logicamente equivalenti.

Notazione per l'equivalenza logica

Nel seguito, useremo molto il concetto di equivalenza logica, per cui introduciamo il simbolo $\equiv$ per indicarla.

Per dire che $\neg A \leftrightarrow B$ e $A \leftrightarrow \neg B$ sono equivalenti, scriveremo $\neg A \leftrightarrow B \equiv A \leftrightarrow \neg B$

Attenzione!

Il simbolo $\equiv$ **non è un connettivo** e $\neg A \leftrightarrow B \equiv A \leftrightarrow \neg B$ non è una forma proposizionale. Il simbolo $\equiv$ è solo una notazione abbreviata per dire che due fp sono equivalenti.

Tautologie ed equivalenza logica (1)

Teorema

Due fp X e Y sono logicamente equivalenti se e solo se la fp $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia.

Esempio

Le fp $X = \neg A \vee B$ e $Y = A \rightarrow B$ sono equivalenti. Infatti

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	V	F	V	V

Le due colonne $X = \neg A \vee B$ e $Y = A \rightarrow B$ sono uguali, quindi $X \equiv Y$.

Cosa possiamo dire di $X \leftrightarrow Y$?

Tautologie ed equivalenza logica (2)

Teorema

Due fp X e Y sono logicamente equivalenti se e solo se la fp $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia.

Esempio

Aggiungiamo una nuova colonna alla tavola.

A	B	$\neg A$	$\neg A \lor B$	$A \to B$	$(\neg A \lor B) \leftrightarrow (A \to B)$
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V

La colonna $X \leftrightarrow Y = (\neg A \lor B) \leftrightarrow (A \to B)$ è sempre vera, perché i due valori di verità che la doppia implicazione collega sono uguali.

Dunque $X \leftrightarrow Y$ è una tautologia.

Contenuti

Equivalenze logiche notevoli

L'equivalenza logica è assimilabile all'uguaglianza tra espressioni algebriche:

- siccome $x + y = y + x$, dovunque c'è una somma possiamo invertire gli addendi senza cambiare il risultato.
- allo stesso modo, siccome $A \vee B \equiv B \vee A$, possiamo invertire l'ordine delle proposizioni a cui si applica l'or senza cambiare il risultato (ovvero la tavola di verità)

Da ora in poi, **utilizzeremo nelle fp anche i due simboli $\top$ e $\bot$**, che stanno per una formula sempre vera (tautologia) ed una sempre falsa (contraddizione). Non usiamo V ed F per evitare confusione con le lettere proposizionali.

Vediamo quindi alcune equivalenze logiche notevoli. Quando possibile, faremo un parallelo con equivalenze notevoli delle espressioni algebriche, secondo la corrispondenza:

$$\vee \Rightarrow + \qquad \wedge \Rightarrow \cdot \qquad \neg \Rightarrow 1 - \qquad \top \Rightarrow 1 \qquad \bot \Rightarrow 0$$

Proprietà di congiunzione e disgiunzione

logica	**nome proprietà**	**algebra**
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	commutativa	$x \cdot y = y \cdot x$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	associativa	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$A \wedge A \equiv A$	idempotenza	$\cancel{x \cdot x = x}$
$A \wedge \top \equiv A$	elemento neutro	$x \cdot 1 = x$
$A \wedge \bot \equiv \bot$	elem. assorbente	$x \cdot 0 = 0$
$A \vee B \equiv B \vee A$	commutativa	$x + y = y + x$
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	associativa	$x + (y + z) = (x + y) + z$
$A \vee A \equiv A$	idempotenza	$\cancel{x + x = x}$
$A \vee \bot \equiv A$	elemento neutro	$x + 0 = x$
$A \vee \top \equiv \top$	elem. assorbente	$\cancel{x + 1 = 1}$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributiva	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributiva	$\cancel{x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)}$
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	assorbimento	$\cancel{x \cdot (x + y) = x}$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	assorbimento	$\cancel{x + (x \cdot y) = x}$

Proprietà che coinvolgono la negazione

logica	**nome proprietà**	**algebra**
$\neg\neg A \equiv A$	doppia negazione	$1 - (1 - x) = x$
$A \vee \neg A \equiv \top$	terzo escluso	$x + (1 - x) = 1$
$A \wedge \neg A \equiv \bot$	non contraddizione	$\cancel{x \cdot (1 - x) = 0}$
$\neg\top = \bot$		$1 - 1 = 0$
$\neg\bot = \top$		$1 - 0 = 1$

Alcuni esempi in linguaggio naturale (1)

Il fatto che quelle viste prime siano tatutologie segue dal calcolo della tavole di verità. Cerchiamo comunque di dare una qualche intuizione nel linguaggio naturale.

- $A \land B \equiv B \land A$: cambiare l'ordine delle affermazioni, non cambia il significato. "Carlo è alto e Mario è basso" $\equiv$ "Mario è basso e Carlo è alto".
- $A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$: non è facile fare un esempio in italiano, dove non ci sono le parentesi. Tuttavia, possiamo ripetere il soggetto in modo diverso per dare una idea del raggruppamento. 'Carlo è alto e biondo e Carlo è affabile" $\equiv$ "Carlo è alto e Carlo è biondo e affabile".
- $A \land A \equiv A$: ripetere due voleta la stessa proposizione non ne cambia il significato.'Carlo è alto e Carlo è alto" $\equiv$ "Carlo è alto".
- $A \land \top \equiv A$: "Michele è o non è alto" è sicuramente vero, quindi non ha alcuna rilevanza. "Carlo è alto e Michele è o non è alto" $\equiv$ "Carlo è alto"
- $A \land \bot \equiv \bot$: "Michele è alto e non è alto" è sicuramente falso. Quindi "Carlo è alto e Michele è alto e non è alto" $\equiv$ "Carlo è alto".

Alcuni esempi in linguaggio naturale (2)

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$: "Carlo studia informatica e Carlo studia economia o filosofia" $\equiv$ "Carlo studia informatica ed economia oppure Carlo studia informatica e filosofia".
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$: "Carlo studia informatica oppure Carlo studia economia e filosofia" $\equiv$ "Carlo studia informatica o economia e Carlo studio informatica o filosofia". Tuttavia, l'equivalenza in italiano non è molto intuitiva.
- $A \wedge (A \vee B)$: "Carlo studia informatica e Carlo studia informatica o economia" $\equiv$ "Carlo studia informatica". Infatti, perché la proposizione sia vera, è necessario che Carlo studi informatica, mentre se studia anche economia è ininfluente.
- $A \vee (A \wedge B)$: "Carlo studia informatica oppure Carlo studia informatica ed economia" $\equiv$ "Carlo studia informatica". Come prima, perché la proposizione sia vera è sufficiente che Carlo studi informatica, mentre se studia anche economia è ininfluente.
- $\neg\neg A \equiv A$: due negazioni affermano. "Non è vero che Carlo non studia informatica" $\equiv$ "Carlo studia informatica ".

Leggi di De Morgan (1)

Le leggi di De Morgan correlano congiunzione e disgiunzione con la negazione. Sono leggi molto importanti che consentono di semplificare le fp complesse.

$$\neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B$$
$$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$$

Esempio

Consideriamo la proposizione:

Carlo non studia informatica ed economia

abbreviazione di

Non è vero che Carlo studia informatica ed economia

È equivalente a dire

Carlo non studia informatica o Carlo non studia economia

Leggi di De Morgan (2)

Esempio

Consideriamo un frammento di programma per calcolare le spese di spedizione.

```
shipping_charge = 10
if not (state == "Italy" and region != "Sardegna"):
    shipping_charge = 20
```

C'è una tariffa base di 10 €, ma sotto certe condizioni la tariffa sale a 20 € Ma quali sono queste codizioni ? Non si capisce molto bene.

Applicando De Morgan, possiamo riscrivere la condizione come:

```
(not state == "Italy") or (not regione != "Sardegna")
```

E quindi

```
state != "Italy" or regione == "Sardegna"
```

Le spese aggiuntive si pagane se la spedizione e all'estero, oppure in Sardegna.

Il principio di dualità

Teorema (Principio di dualità)

Sia X, Y due fp tali che $X \equiv Y$, nessuna delle quali contiene $\rightarrow$. Se X' e Y' si ottengono da X e Y scambiando:

- $\wedge$ *con* $\vee$,
- $\leftrightarrow$ *con* $\underline{\vee}$,
- $\top$ *con* $\bot$,

allora $X' \equiv Y'$.

Esempio

Prendiamo ad esempio l'equivalenza

$$A \wedge \top \equiv A$$

Applicando ad ambo i membri dell'equivalenza gli scambi di prima, otteniamo

$$A \vee \bot \equiv A$$

Proprietà associativa e parentesi

Il fatto che $\wedge$ e $\vee$ godano della proprietà associativa, ci consente di risparmiare qualche parentesi.

- Consideriamo la formula $A \wedge B \wedge C$. La formula non va bene perché è ambigua, la si può interpretare come $(A \wedge B) \wedge C$ oppure $A \wedge (B \wedge C)$.
- Le due possibile interpretazioni sono però equivalenti, per la proprietà associativa, quindi l'ambiguità non ci crea nessun problema!
- La stessa cosa vale anche per $\vee$, ma non se c'è una mescolanza di $\wedge$ e $\vee$:
  - possiamo scrivere $A \vee B \vee C$ perché tanto le due alternative $(A \vee B) \vee C$ e $A \vee (B \vee C)$ sono equivalenti;
  - non possiamo scrivere $A \wedge B \vee C$ perché le due alternative $(A \wedge B) \vee C$ e $A \wedge (B \vee C)$ **non** sono equivalenti.

Equivalenze con l'or esclusivo

L'or esclusivo è definibile a partire da and, or e not, come segue:

$$A \veebar B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Notare che le due fp $A \wedge \neg B$ e $\neg A \wedge B$ corrispondono esattamente ai due casi in cui l'or esclusivo è vero (una delle due proposizioni è vera, l'altra è falsa).

Altre equivalenze notevoli:

$$\begin{aligned}
A \veebar B &\equiv B \veebar A \\
A \veebar (B \veebar C) &\equiv (A \veebar B) \veebar C \\
A \veebar \bot &\equiv A \\
A \veebar \top &\equiv \neg A \\
A \veebar A &\equiv \bot \\
A \veebar \neg A &\equiv \top
\end{aligned}$$

L'implicazione (1)

L'implicazione è definibile a partire da and, or, e not:

$$A \to B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B$$

Detto in altro modo, affermare $A \to B$ è equivalente ad affermare:

- "non è vero che A è vero e contemporaneamente B è falso"
- "A è falso oppure B è vero".

Ancora:

$$\begin{aligned} A \to A &\equiv \top \\ A \to \neg A &\equiv \neg A \\ \bot \to A &\equiv \top \\ \top \to A &\equiv A \\ A \to \bot &\equiv \neg A \\ A \to \top &\equiv \top \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \to C &\equiv A \to (B \to C) \\ A \to (B \wedge C) &\equiv (A \to B) \wedge (A \to C) \\ (A \vee B) \to C &\equiv (A \to C) \wedge (B \to C) \\ A \to (B \vee C) &\equiv (A \to B) \vee (A \to C) \end{aligned}$$

L'implicazione (2)

Data una implicazione $A \to B$, si possono definire altre tre implicazioni correlate:

- l'implicazione inversa: $B \to A$
- l'implicazione contraria: $\neg A \to \neg B$
- l'implicazione contronominale: $\neg B \to \neg A$

L'inversa e la contraria non sono direttamente correlate con l'implicazione originale, invece la contronominale è equivalente all'originale:

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$$

Esempio

Data la proposizione "se x è divisibile per 4 allora x è pari", vera per tutti gli x:

- l'inversa "se x è pari allora x è divisibile per 4" è falsa per $x = 2$;
- la contraria "se x non è divisibile per 4 allora x non è pari" è falsa per $x = 2$;
- la contronominale "se x non è pari allora x non è divisibile per 4" è vera per tutti i possibili x.

Contronomiale, modus ponens e modus tollens

Nella parte introduttiva del corso abbiamo visto due regole di inferenza che abbiamo chiamato *modus ponens* e *modus tollens*:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B} \text{ (modus ponens)} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \end{array}}{\neg A} \text{ (modus tollens)}$$

In virtù della equivalenza logica tra $A \to B$ e $\neg B \to \neg A$, possiamo pensare al modus tollens come segue:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg B \to \neg A \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

che quindi non è altro che il modus ponens ma applicato alla contronominale della proposizione $A \to B$.

La doppia implicazione (1)

Due importanti equivalenze riguardanti la doppia implicazione sono

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$$

che mostrano come $A \leftrightarrow B$ non è altro che la congiunzione di due implicazioni nei due versi opposti.

La doppia implicazione è inoltre definibile a partire dall'or esclusivo (e viceversa).

$$A \leftrightarrow B \equiv \neg(A \veebar B)$$
$$A \veebar B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)$$

La doppia implicazione (2)

La doppia implicazione è anche equivalente ad una formula che usa solo and, or e not:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

dove $A \wedge B$ e $\neg A \wedge \neg B$ rappresentano i due casi per cui la doppia implicazione è vera.

Altre equivalenze che coinvogono la doppia implicazione:

$$\begin{aligned}
A \leftrightarrow A &\equiv \top \\
A \leftrightarrow \neg A &\equiv \bot \\
A \leftrightarrow \bot &\equiv \neg A \\
A \leftrightarrow \top &\equiv A \\
A \leftrightarrow B &\equiv B \leftrightarrow A
\end{aligned}$$

Contenuti

Applicare una equivalenza ad una formula (1)

Il fatto che $A \wedge B \equiv B \wedge A$ vuol dire che, ovunque in una fp compare $A \wedge B$, è possibile rimpiazzarlo con $B \wedge A$ senza cambiare il significato della formula (e viceversa).

- $A \wedge B \rightarrow C \equiv B \wedge A \rightarrow C$
- $(B \wedge A) \veebar (C \leftrightarrow A) \equiv (A \wedge B) \veebar (C \leftrightarrow A)$

Analogamente, in matematica sappiamo che $x + y = y + x$. Questo ci consente di rimpiazzare $x + y$ con $y + x$ ovunque in una formale. Ad esempio,

- $(a(x + y))^2 = (a(y + x))^2$.

Questo fatto si può formalizzare come segue:

Teorema

Sia X, X' ed Y forme proposizionali, con $X \equiv X'$. Se Y' è ottenuta da Y rimpiazzando tute le occorrenze di X con X' o viceversa, allora $Y \equiv Y'$.

Applicare una equivalenza ad una formula (2)

Inoltre, in una equivalenza com $A \wedge B \equiv B \wedge A$, le lettere A e B possono essere rimpiazzate con qualsiasi altra formula proposizionale, ottenendo sempre una equivalenza:

- $C \wedge D \equiv D \wedge C$
  (abbiamo rimpiazzato A con C e B con D)
- $(A \rightarrow B) \wedge (A \vee C) \equiv (A \vee C) \wedge (A \rightarrow B)$
  (abbiamo rimpiazzato A con $A \rightarrow B$, e B con $A \vee C$)

Analogamente, in matematica sappiamo che $x + y = y + x$. Questo ci consente di scambiare i due addendi in ogni espressione.

- $2xy^3 + \log z = \log z + 2xy^3$

Questo fatto si può formalizzare come segue:

Teorema

Sia $P \equiv Q$. Se P' e Q' sono altre forme proposizionali ottenute da P e Q rimpiazzando le lettere proposizionali con forme proposizionali in maniera consistente (ovvero, la stessa lettera è sempre sostituita dalla stessa formula), allora $P' \equiv Q'$.

Applicare una equivalenza ad una formula (3)

In conclusione, il fatto che $A \wedge B \equiv B \wedge A$ vuol dire che:

> *in una forma proposizionale, ogni volta che c'è un connettivo "and" è possibile cambiare l'ordine dei congiunti e ottenere una forma equivalente.*

Analogamente per le altre equivalenze notevoli.

È possibile usare queste manipolazioni di tipo algebrico per

- verificare nuove equivalenze logiche in maniera più veloce non costruendo la tavola di verità;
- semplificare delle forme proposizionali complesse.

Verificare una equivalenza logica (1)

Vogliamo verificare l'equivalenza $X \equiv Y$. Si parte dalla proposizione sul lato sinistro o destro (quella che sembra più comoda) e si applicano le equivalenze note fino ad ottenere l'altra proposizione.

Esempio

Vogliamo verificare l'equivalenza $A \lor B \equiv \neg(\neg A \land \neg B)$. Partendo da destra:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg A \land \neg B) && \text{(legge di De Morgan)} \\
\equiv\ & \neg\neg A \lor \neg\neg B && \text{(doppia negazione)} \\
\equiv\ & A \lor \neg\neg B && \text{(doppia negazione)} \\
\equiv\ & A \lor B
\end{aligned}
$$

Verificare una equivalenza logica (2)

Spieghiamo più dettagliatamente il passaggio da $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ a $\neg\neg A \vee \neg\neg B$.

- Iniziamo a riscrivere la legge di De Morgan, ma per non fare confusione, usando le lettere X e Y invece di A e B:

$$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$$

- Noi vogliamo applicare questa legge a $\neg(\neg A \wedge \neg B)$: dobbiamo capire se è possibile sostiture X e Y nella legge di De Morgan con delle formule in maniera tale che $\neg(X \wedge Y)$ diventi $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.
- Questo è possibile con la sostituzione $X \mapsto \neg A$ e $Y \mapsto \neg B$.
- Applicando queste sostituzioni alla legge di De Morgan, otteniamo

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg\neg A \vee \neg\neg B$$

Questo vale anche per l'applicazione delle altre equivalenze notevoli, finché con la pratica il loro utilizzo diventa automatico.

Semplificazione di una fp

Vogliamo semplificare la forma proposizionale X. La tecnica è la stessa: si parte da X e si applicano le equivalenze note fino ad ottenere una forma più semplice, ricordando che talvolta, per semplificare le cose, occorre prima complicarle !

Esempio

Vogliamo semplificare la fp $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$.

$$\begin{array}{lll} & (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) & \text{(prop. distributiva}^*\text{)} \\ \equiv & A \wedge (B \vee \neg B) & \text{(terzo escluso)} \\ \equiv & A \wedge \top & \text{(elemento neutro di } \wedge\text{)} \\ \equiv & A & \end{array}$$

Quello indicato con * è l'uso della proprietà distributiva $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$ ma da destra a sinistra. È l'operazione che nelle espressioni algebriche si chiama *mettere in evidenza* o *raccogliere*.