

Basi di connettivi

prof. Gianluca Amato

11 novembre 2024

1 Determinare la fp di un tavola di verità

2 Basi di connettivi

Determinare la fp di un tavola di verità (1)

Consideriamo la seguente tavola di verità con una colonna non definita:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>?</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>F</i>

Ci chiediamo se esiste una forma proposizionale che la genera.

Determinare la fp di un tavola di verità (2)

Effettivamente, esiste una procedura sistematica per ottenere la fp cercata:

A	B	C	?	
F	F	F	F	
F	F	V	F	
F	V	F	F	
F	V	V	F	
V	F	F	V	$A \wedge \neg B \wedge \neg C$
V	F	V	V	$A \wedge \neg B \wedge C$
V	V	F	V	$A \wedge B \wedge \neg C$
V	V	V	F	

- 1 individuare le righe il cui risultato è V
- 2 per ogni riga, scrivere la congiunzione di tutte le variabili: quelle che hanno valore V appaiono direttamente, quelle che hanno valore F appaiono negate
- 3 scrivere la disgiunzione di tutte le congiunzioni ottenute al passo precedente, ottenendo

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Una formula di questo tipo è detta in *forma normale disgiuntiva* (FND). Questo esempio ci mostra anche che tutte le fp ne hanno una equivalente in FND.

Perché funziona?

Ognuna delle tre congiunzioni è vera solo in corrispondenza della riga che l'ha generate (nell'esempio qui sotto, quella dello stesso colore).

L'or di queste congiunzioni è vera in corrispondenza di tutte le righe in cui almeno una delle congiunzioni è vera, cioè in corrispondenza di tutte le righe in cui la colonna ? è V.

A	B	C	?	$P = A \wedge \neg B \wedge \neg C$	$Q = A \wedge \neg B \wedge C$	$R = A \wedge B \wedge \neg C$	$P \vee Q \vee R$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F

Semplificare la FND (1)

La formula ottenuta in questo modo può essere notevolmente più complessa del necessario. Consideriamo la seguente tavola di verità.

A	B	$?$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Guardando la tavola, è possibile vedere che la formula cercata è $\neg(A \wedge B)$.

Ma applicando il meccanismo visto prima, otteniamo $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Tuttavia, applicando le equivalenze logiche, possiamo semplificarla.

Semplificare la FND (2)

$$\begin{aligned} & (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) && \text{(raccolgimento)} \\ \equiv & (\neg A \wedge (\neg B \vee B)) \vee (A \wedge \neg B) && \text{(terzo escluso)} \\ \equiv & (\neg A \wedge \top) \vee (A \wedge \neg B) && \text{(elemento neutro di } \wedge \text{)} \\ \equiv & \neg A \vee (A \wedge \neg B) && \text{(prop. distributiva)} \\ \equiv & (\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg B) && \text{(terzo escluso)} \\ \equiv & \top \wedge (\neg A \vee \neg B) && \text{(elemento neutro di } \wedge \text{)} \\ \equiv & \neg A \vee \neg B && \text{(De Morgan*)} \\ \equiv & \neg(A \wedge B) \end{aligned}$$

Nel passaggio marcato da * è stata usata la legge di De Morgan $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ al contrario, da destra verso sinistra.

Usando la procedura vista, possiamo facilmente ottenere le equivalenze che ci consentono di riscrivere i connettivi \rightarrow , $\underline{\vee}$, \leftrightarrow in termini di \wedge , \vee e \neg . Si tratta di:

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \underline{\vee} B \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

che abbiamo già visto nella lezione sulle equivalenze notevoli.

- 1 Determinare la fp di un tavola di verità
- 2 Basi di connettivi

Abbiamo visto come qualunque fp abbia una equivalente in forma normale disgiuntiva. Le FND usano solo i connettivi \neg , \wedge e \vee . Dunque:

Teorema

Tutte le forme proposizionali ne hanno una equivalente che usa solo \neg , \wedge e \vee .

Definizione

Un insieme di connettivi che consentono di esprimere tutte le fp è detto *base di connettivi*.

Il teorema di sopra si può quindi riformulare nel modo seguente:

Teorema

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ è una base di connettivi.

\wedge e \neg costituiscono una base di connettivi (1)

In realtà, \neg e \wedge da soli sono sufficienti per avere una base di connettivi. Infatti è facile verificare che

Teorema

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Dimostrazione.

Potremmo verificarlo con le tavole di verità, ma proviamo a farlo per via algebrica. Partiamo dal secondo membro:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg A \wedge \neg B) && \text{(De Morgan)} \\ \equiv & \neg\neg A \vee \neg\neg B && \text{(doppia negazione)} \\ \equiv & A \vee B \end{aligned}$$



\wedge e \neg costituiscono una base di connettivi (2)

Poiché

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

quando abbiamo un fp che contiene \neg , \wedge e \vee , possiamo rimpiazzare tutte le \vee usando la formula di sopra, ottenendo una formula che usa solo \neg e \wedge .

Esempio

Sia data la fp

$$\neg A \vee (B \wedge C)$$

Applicando l'equivalenza di prima, otteniamo:

$$\neg(\neg\neg A \wedge \neg(B \wedge C))$$

che volendo possiamo semplificare in

$$\neg(A \wedge \neg(B \wedge C))$$

\wedge e \neg costituiscono una base di connettivi (2)

Possiamo concludere con il seguente:

Teorema

$\{\neg, \wedge\}$ è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Qualunque formula si può riscrivere in una equivalente che usa solo \neg , \wedge e \vee . Ma poiché $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$, possiamo rimpiazzare tutte le disgiunzioni con formule che usano solo \neg e \wedge . Quindi $\{\neg, \wedge\}$ è una base di connettivi. □

Ovviamente, in maniera analoga, usando il fatto che $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$, si dimostra anche

Teorema

$\{\neg, \vee\}$ è una base di connettivi.

\wedge e \vee non costituiscono una base di connettivi

Ci si potrebbe chiedere se \wedge e \vee costituiscono una base di connettivi, facendo a meno della negazione. La risposta è negativa.

Teorema

$\{\wedge, \vee\}$ non è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Sia X una fp che usa solo i connettivi \wedge e \vee . Poiché $F \vee F = F$ e $F \wedge F = F$, segue che se tutte le lettere proposizionali hanno valore di verità falso, la fp X ha anch'essa valore di verità falso. Quindi non è possibile esprimere con solo \vee e \wedge una fp che è sempre vera. \square

Come conseguenza, ovviamente, neanche \wedge o \vee da soli costituiscono una base.

\rightarrow e \perp costituiscono una base di connettivi

Teorema

$\{\rightarrow, \perp\}$ è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Basta trovare formule equivalenti a $\neg A$ ed a $A \vee B$ che usano solo \rightarrow e \perp . È facile verificare che

$$\begin{aligned}\neg A &\equiv A \rightarrow \perp \\ A \vee B &\equiv \neg A \rightarrow B \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow B\end{aligned}$$



Invece \rightarrow da sola non è sufficiente. Siccome $V \rightarrow V = V$, qualunque formula che usa solo \rightarrow ha valore di verità V quando tutte le lettere proposizionali hanno valore di verità V . Quindi \rightarrow da sola non può esprimere, ad esempio, una fp sempre falsa.

Il connettivo nand

Un connettivo nuovo è il connettivo “**nand**”, abbreviazione di “not and”. In italiano corrisponde al cosiddetto “**o incompatibile**”. Non esiste un simbolo universalmente accettato per il nand, ma spesso si usa \uparrow .

La sua tavola di verità è la negazione della congiunzione:

A	B	$A \uparrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Esempio

A tavola vale la regola: “o si mangia o si parla”, vuol dire che non si possono fare entrambe le cose, ma qualunque altra combinazione è ammessa (anche non fare nessuna delle due).

↑ costituisce da solo una base di connettivi

Teorema

$\{\uparrow\}$ è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Siccome sappiamo che $\{\neg, \wedge\}$ è una base, basta mostrare che sia \neg che \wedge si possono esprimere usando solo \uparrow .

Si ottiene facilmente, con le tavole di verità:

$$\begin{aligned}\neg A &\equiv A \uparrow A \\ A \wedge B &\equiv \neg(A \uparrow B) \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)\end{aligned}$$



Il connettivo nor

Un altro connettivo nuovo è il connettivo “nor”, abbreviazione di “not or”. In italiano corrisponde a “non è né ... né” (in inglese, appunto, “neither ... nor”). Anche in questo caso non esiste un simbolo universalmente accettato per il nor, ma spesso si usa \downarrow . La sua tavola di verità è la negazione della disgiunzione:

A	B	$A \downarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	F

Esempio

La proposizione “Non è né sabato né domenica” è vera solo se le proposizioni “è sabato” ed “è domenica” sono false.

↓ costituisce da solo una base di connettivi

Teorema

$\{\downarrow\}$ è una base di connettivi.

Dimostrazione.

Siccome sappiamo che $\{\neg, \vee\}$ è una base, basta mostrare che sia \neg che \vee si possono esprimere usando solo \downarrow .

Si ottiene facilmente, con le tavole di verità:

$$\begin{aligned}\neg A &\equiv A \downarrow A \\ A \vee B &\equiv \neg(A \vee B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)\end{aligned}$$

