Deduzione naturale

prof. Gianluca Amato

19 dicembre 2024

Conseguenza logica (1)

Nella lezione precedente abbiamo introdotto il concetto di conseguenza logica che ci permette di stabilire se una inferenza è corretta o no.

Verificare se Y è conseguenza logica di $X_1, \ldots, X_n$ con le tavole di verità è un metodo:

- meccanico (non richiede intuizione);
- generale (funziona per qualsiasi formula);
- molto lontano da quello che farebbe normalmente un essere umano per verificare la correttezza del ragionamento.

Conseguenza logica (2)

Ad esempio, consideriamo la seguente inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Carlo è laureato in matematica o in economia}\\ \textit{Se Carlo è laureato in economia, allora fa il commercialista}\\ \textit{Carlo non fa il commercialista}\end{array}}{\textit{Carlo è laureato in matematica}}$$

o la sua equivalente forma logica

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ B \rightarrow C\\ \neg C\end{array}}{A}$$

Conseguenza logica (3)

Si verifica facilmente con le tavole di verità che l'inferenza è corretta.

Usare le tavole di verità corrisponde a considerare tutti i possibili "universi alternativi" in cui Carlo è o non è laureato in matematica, laureato in economia, commercialista, e verificare che in tutti gli "universi alternativi" nei quali le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Ma un persona non ragiona normalmente in questo modo. Piuttosto, per convincersi che l'inferenza è corretta, seguirebbe un argomento di questo tipo:

> *So che se Carlo è laureato in economia allora fa il commercialista. Ma siccome non fa il commercialista, ne segue che non può essere laureato in economia (regola del modus tollens). Tuttavia, sappiamo anche che Carlo è laureato o in matematica o in economia, e non essendo laureato in economia non può che essere laureato in matematica (regola del sillogismo disgiuntivo).*

Calcoli logici

Vogliamo adesso introdurre un metodo di verifica della correttezza di una inferenza che sia più vicino a quello che farebbe un essere umano per verificare la validità di un ragionamento.

Dall'esempio di prima, si vede che il suo argomento si basa sulla combinazione di regole di inferenza di base (come modus ponens e sillogismo disgiuntivo) che si assumono come note.

I dettagli però di quali regole di inferenza siano valide e come si possano combinare per ottenere nuove inferenze non sono ovvi. Scelte diverse danno luogo a calcoli logici diversi.

Definizione (Calcolo logico)

Un calcolo logico è un insieme di regole che permettono di derivare nuove formule logiche a partire da formule date.

Altri termini che sono più o meno sinonimi di calcolo logico sono sistema deduttivo o sistema di prova.

Deduzione naturale

Il calcolo logico che ci interessa in questo corso è chiamato deduzione naturale.

- Introdotta dal logico Gerhard Gentzen nella prima metà degli anni '30.
- È un calcolo molto vicino a quello che farebbe una persona per dimostrare la correttezza di una inferenza.
- È molto usato in logica e in informatica teorica.

Un sottoinsieme dei connettivi

Non sarebbe necessario, ma per semplicità presentiamo la deduzione naturale per un sottoinsieme dei connettivi logici:

$$\land, \lor, \to, \bot$$

Sappiamo che tutti gli altri sono equivalenti a combinazioni di questi:

$$\begin{aligned}
\neg X &\equiv X \to \bot \\
X \leftrightarrow Y &\equiv (X \to Y) \land (Y \to X) \\
X \veebar Y &\equiv (X \land \neg Y) \lor (\neg X \land Y) \\
&\equiv (X \land (Y \to \bot)) \lor ((X \to \bot) \land Y) \\
\top &\equiv X \lor \neg X
\end{aligned}$$

Regole di inferenza

Le regole di inferenza della deduzione naturale hanno alcune differenze rispetto a quelle viste finora:

- le premesse si scrivono in una unica riga sopra la linea orizzontale, invece che su più righe. Ad esempio, si scrive

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad \text{invece di} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

  Questo al solo scopo di permettere di combinare graficamente più regole di inferenza in una unica dimostrazione.
- in alcune regole di inferenza è consentito scaricare delle premesse (vedremo più avanti cosa significa).

Regole di introduzione ed eliminazione

(Quasi per) ogni connettivo logico, ci sono due tipi di regole di inferenza:

- le regole di introduzione (che permettono di introdurre il connettivo nella conclusione);
- le regole di eliminazione (che permettono di eliminare il connettivo da una premessa).

Ogni regola ha un nome come $\mathrm{E}\wedge$ o $\mathrm{I}_1\vee$, composto da:

- una lettera che identifica se si tratta di una regola di introduzione (I) o di eliminazione (E);
- un eventuale numero che identifica una variante della regola, se ce n'è più d'una;
- il simbolo del connettivo logico.

Regole per la congiunzione

Come sempre la congiunzione è il connettivo più semplice.

- **introduzione**:

$$\frac{X \qquad Y}{X \wedge Y}\,(\mathrm{I}\wedge)$$

- **eliminazione**:

$$\frac{X \wedge Y}{X}\,(\mathrm{E}_1\wedge) \qquad \frac{X \wedge Y}{Y}\,(\mathrm{E}_2\wedge)$$

Dimostrazione

Le regole di inferenza si possono combinare per ottenere una dimostrazione:

- Una dimostrazione (o derivazione) si ottiene combinando tra loro le regole di inferenza in un unica *struttura ad albero*, dove la conclusione di una inferenza può essere la premessa di un'altra.
- Le formule che non sono conclusioni di alcuna inferenza, ovvero che non hanno nessuna linea orizzontale sopra di loro, si chiamano premesse della dimostrazione
- Le formule che non sono premesse di alcuna inferenza, ovvero che non hanno nessuna linea orizzontale sotto di loro, si chiamano conclusioni della dimostrazione.
- In una dimostrazione può esserci una sola conclusione.

Se esiste una dimostrazione che ha

- Y come conclusione;
- $X_1, \ldots, X_n$ come premesse (nessuna esclusa, tranne quelle scaricate, di cui parleremo tra un po')

si dice che Y è dimostrabile da $X_1, \ldots, X_n$ e si scrive

$$X_1, \ldots, X_n \vdash Y$$

Esempio

Consideriamo la seguente dimostrazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B}\,(\mathrm{E}_1\wedge)}{B}\,(\mathrm{E}_2\wedge) \qquad \dfrac{(A \wedge B) \wedge C}{C}\,(\mathrm{E}_2\wedge)}{B \wedge C}\,(\mathrm{I}\wedge)$$

Le premesse della dimostrazione sono evidenziate in rosso, la conclusione in blu.

Dunque questa è una dimostrazione di $B \wedge C$ a partire da $(A \wedge B) \wedge C$. In simboli:

$$(A \wedge B) \wedge C \vdash B \wedge C$$

Regole per l'implicazione

- **introduzione**:

$$\frac{\begin{array}{c}[X]\\ \vdots \\ Y\end{array}}{X \to Y}\ (\mathrm{I}{\to})$$

La $[X]$ indica che è possibile scaricare la premessa X nella dimostrazione che porta a Y. Questo significa che anche se X compare come premessa della dimostrazione, possiamo far finta che non ci sia. La linea tratteggiata indica che lì in mezzo c'è una dimostrazione anche molto complessa, ma non compare effettivamente in una dimostrazione.

Questa regola corrisponde alla classica modalità con cui si dimostra un'implicazione: si assume l'antecedente e si dimostra il conseguente.

- **eliminazione**:

$$\frac{X \to Y \qquad X}{Y}\ (\mathrm{E}{\to})$$

Questa è la stessa regola che abbiamo chiamato in precedenza *modus ponens*.

example

Verifichiamo che

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C$$

$$\dfrac{\dfrac{B \to C \qquad \dfrac{A \to B \qquad [A]}{B}\ (\mathrm{E}{\to})}{C}\ (\mathrm{E}{\to})}{A \to C}\ (\mathrm{I}{\to})$$

Le premesse della dimostrazione **non scaricate** sono evidenziate in rosso, la conclusione in blu. La formula in verde A è stata scaricata, quindi è come se non ci fosse ai fini di determinare quali sono le premesse della dimostrazione.

Regole per la disgiunzione

- **introduzione**:

$$\frac{X}{X \vee Y}\,(\mathrm{I}_1\vee) \qquad \frac{Y}{X \vee Y}\,(\mathrm{I}_2\vee)$$

- **eliminazione**:

$$\frac{X \vee Y \qquad \begin{array}{c}[X]\\ \vdots\\ Z\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Y]\\ \vdots\\ Z\end{array}}{Z}\,(\mathrm{E}\vee)$$

Questa regola corrisponde al ragionamento per casi. Se so che $X \vee Y$, mi basta considerare separatamente i casi per cui vale X ed per cui vale Y (sono le assunzioni da scaricare). Se in entrambi i casi riesco a dimostrare Z, allora Z segue da $X \vee Y$.

Esempio

Consideriamo la dimostrazione di

$$A \lor B, A \to C, B \to C \vdash C$$

$$\dfrac{\color{red}{A \lor B} \qquad \dfrac{\color{red}{A \to C} \qquad [A]}{C}\,(\mathrm{E}{\to}) \qquad \dfrac{\color{red}{B \to C} \qquad [B]}{C}\,(\mathrm{E}{\to})}{\color{blue}{C}}\,(\mathrm{E}{\lor})$$

Le premesse **non scaricate** sono evidenziate in rosso, la conclusione in blu. Le formule A e B sono state scaricate, quindi è come se non ci fossero ai fini di determinare quali sono le premesse della dimostrazione.

Regole per il falso

Per il simbolo $\perp$ perdiamo la simmetria tra introduzione ed eliminazione, perché abbiamo solo la regola di eliminazione.

- **eliminazione**:

$$\frac{\perp}{X}\ (\mathrm{E}\perp)$$

  Questa è una variante della regola che abbiamo chiamato "*ex falso quodlibet*", ovvero il fatto che da una contraddizione si può dedurre qualsiasi cosa.

Esempio

Consideriamo la dimostrazione vista all'inizio di queste slide, ovvero

$$A \vee B, B \to C, \neg C \vdash A$$

Siccome non trattiamo direttamente la negazione, riscriviamola nel suo equivalente $C \to \bot$.

$$\dfrac{A \vee B \qquad [A] \qquad \dfrac{\dfrac{C \to \bot \qquad \dfrac{B \to C \qquad [B]}{C}\,(\mathrm{E}{\to})}{\bot}\,(\mathrm{E}{\to})}{A}\,(\mathrm{E}\bot)}{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E}\vee)$$

Notare che qui l'uso di $(\mathrm{E}\bot)$ è essenziale. Nel ragionamento per casi, quando assumiamo che B è vero arriviamo ad una contraddizione $(\bot)$. Noi diremmo informalmente che il caso B non è valido e dobbiamo considerare solo il caso A, ma nella deduzione naturale il ragionamento si esplicita in maniera leggermente diversa: diciamo che siccome siamo arrivati ad una contraddizione, allora anche nel caso B possiamo comunque concludere A.

Terzo escluso

Queste regole corrispondo alla logica intuizionista, un tipo di logica che non accetta il principio del terzo escluso. Ed infatti, se ci provate, non c'è modo di dimostrare

$$\vdash A \vee \neg A$$

ovvero che $A \vee \neg A$ è vero senza assumere ipotesi aggiuntive.

Per rendere la deduzione naturale equivalente alla logica delle proposizioni classica, si aggiunge una regola di inferenza specifica che non ricade nella classificazione in regole di introduzione ed eliminazione.

Ci sono vari modi per farlo. Uno di questi è aggiungere direttamente il terzo escluso come regola di inferenza:

$$\frac{}{X \vee (X \to \bot)}\ (\mathsf{TE})$$

Si noti che è una regola di inferenza senza premessa, talvolta chiamata assioma.

Esempio: doppia negazione

Verifichiamo adesso che $\neg\neg A \vdash A$. Ricordiamo che $\neg\neg A \equiv (A \to \bot) \to \bot$.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \lor (A \to \bot)}\,(\mathrm{EM}) \qquad [A] \qquad \dfrac{\dfrac{(A \to \bot) \to \bot \qquad [A \to \bot]}{\bot}\,(\mathrm{E}{\to})}{A}\,(\mathrm{E}\bot)}{A}\,(\mathrm{E}\lor)$$

Notare che il contrario $A \vdash \neg\neg A$ si può dimostrare anche senza il principio del terzo escluso.

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad [A \to \bot]}{\bot}\,(\mathrm{E}{\to})}{(A \to \bot) \to \bot}\,(\mathrm{I}{\to})$$

Tutte le regole

	introduzione	eliminazione
$\wedge$	$\dfrac{X \qquad Y}{X \wedge Y}\,(\mathrm{I}\wedge)$	$\dfrac{X \wedge Y}{X}\,(\mathrm{E}_1\wedge) \qquad \dfrac{X \wedge Y}{Y}\,(\mathrm{E}_2\wedge)$
$\vee$	$\dfrac{X}{X \vee Y}\,(\mathrm{I}_1\vee) \qquad \dfrac{Y}{X \vee Y}\,(\mathrm{I}_2\vee)$	$\dfrac{X \vee Y \qquad \begin{array}{c}[X]\\ \vdots \\ Z\end{array} \qquad \begin{array}{c}[Y]\\ \vdots \\ Z\end{array}}{Z}\,(\mathrm{E}\vee)$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}[X]\\ \vdots \\ Y\end{array}}{Y}\,(\mathrm{I}\rightarrow)$	$\dfrac{X \rightarrow Y \qquad X}{Y}\,(\mathrm{E}\rightarrow)$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{X}\,(\mathrm{E}\bot)$
EM	$\dfrac{}{X \vee (X \rightarrow \bot)}\,(\mathsf{EM})$	

Deduzione naturale e conseguenza logica

Cosa lega le dimostrazioni della deduzione naturale con la conseguenza logica? Noi l'abbiamo presentata come un modo di stabilire se una inferenza è corretta o no, ma per far ciò ci intereresserebbe sapere se:

1. **(essenziale, altrimenti la deduzione naturale non serve a nulla)**:
   è vero che se c'è una dimostrazione di Y a partire da $X_1, \ldots, X_n$ (ovvero $X_1, \ldots, X_n \vdash Y$) allora Y è conseguenza logica di $X_1, \ldots, X_n$ (ovvero $X_1, \ldots, X_n \models Y$) ?
2. **(opzionale, ma sarebbe comodo)**:
   è vero che se Y è conseguenza logica di $X_1, \ldots, X_n$ allora esiste una dimostrazione di Y a partire da $X_1, \ldots, X_n$?

Teoremi di correttezza e completezza

Le due proprietà di sopra sono entrambe vere, e prendono il nome di correttezza e completezza della deduzione naturale. Si parla in realtà di correttezza e completezza forti, perché ci sono anche versioni più deboli di questi teoremi.

Teorema (Correttezza (forte) della deduzione naturale)

Se $X_1, \ldots, X_n \vdash Y$*, allora* $X_1, \ldots, X_n \models Y$*.*

Teorema (Completezza (forte) della deduzione naturale)

Se $X_1, \ldots, X_n \models Y$*, allora* $X_1, \ldots, X_n \vdash Y$*.*

Le dimostrazioni di questo teoremi esulano dal programma del corso. Accenno solo al fatto che dimostrare il teorema di correttezza è relativamente semplice, mentre dimostrare il teorema di completezza è abbastanza difficile.