

**Prova scritta di Matematica Generale CLEA (9 CFU)  
del 16/12/2016**

*L'esercizio 1 va svolto perfettamente prima di passare agli altri.  
In presenza di errori nell'esercizio 1, il compito verrà considerato insufficiente.*

**Esercizio 1:** Dati gli insiemi:

$$A = I(1,2) \quad ; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln(4 - 2x) \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 2\} \quad ; \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[6]{1 - x^2} \in \mathbb{R}\}$$

- a) dire, motivando le risposte, se  $C \subseteq B$  e  $D \subseteq B$ ;
- b) determinare sul piano cartesiano l'insieme  $C \times D$ ;
- c) determinare  $C \cup B$ ,  $D \cap C$  e  $A \setminus B$ .

**Esercizio 2:** Data la funzione  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$  determinare:

- 1) il dominio di  $f(x)$ ;
- 2) il segno di  $f(x)$ ;
- 3) gli eventuali asintoti di  $f(x)$ ;
- 4) gli intervalli di crescita e decrescenza di  $f(x)$ ;
- 5) eventuali punti di massimo e minimo locali e globali di  $f(x)$ ;
- 6) gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali flessi di  $f(x)$ ;
- 7) il grafico di  $f(x)$ ;
- 8) l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $(1, e)$ .

**Esercizio 3:** Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x) = (x + 2)(1 - x)$  e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(0, 2)$ .

**Esercizio 4:** Calcolare gli integrali  $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x^3}} dx$  e  $\int 2x \ln(2x) dx$ .

**Esercizio 5:** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. calcolare  $-2A$  ;
2. calcolare il determinante  $\det A$  e il rango  $\text{rk} A$ ;
3. dire, motivando la risposta, se  $-A$  è simmetrica;
4. dire, motivando la risposta, se il sistema lineare di equazioni

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

ammette soluzioni. (Facoltativo: In caso di esistenza, calcolare le soluzioni con il metodo di Cramer)

**Esercizio 6:** Data la funzione  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$  determinarne il dominio e gli eventuali punti critici, studiandone la natura.