La logica dei predicati

prof. Gianluca Amato

10 gennaio 2025

Inferenze a livello predicativo

Fino ad ora abbiamo trattato la *logica proposizionale*. Nella logica proposizionale il costrutto di base è la proposizione, e proposizioni più complesse si ottengono tramite connettivi logici.

Quando entrano in gioco i *quantificatori*, la logica proposizionale non è più sufficiente per determinare la validità di una inferenza.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Napoleone è corso}\\ \textit{Tutti i corsi sono francesi}\end{array}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\textit{Socrate è un uomo}\\ \textit{Tutti gli uomini sono mortali}\end{array}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

Se analizzate come fatto fin'ora, corrispondo alla regola di inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{C}$$

che non è corretta! Bisogna passare alla logica dei predicati e iniziare ad indagare la struttura delle proposizioni semplici.

Contenuti

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria
- una relazione ternaria

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria
- una relazione ternaria
- in generale, una relazione n-aria

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria
- una relazione ternaria
- in generale, una relazione n-aria

predicati

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria
- una relazione ternaria
- in generale, una relazione n-aria

predicati

Definizione (Proposizioni semplici del primo tipo)

Le proposizioni semplici del primo tipo sono proposizioni in cui un predicato ad n argomenti viene applicato ad n individui.

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una proprietà
- una relazione binaria
- una relazione ternaria
- in generale, una relazione n-aria

predicati

Definizione (Proposizioni semplici del primo tipo)

Le proposizioni semplici del primo tipo sono proposizioni in cui un predicato ad n argomenti viene applicato ad n individui.

Valutare se eliminare completamente il concetto di tipo di una proposizione semplice.

Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Ci si può riferire ad un individuo in vari modi:

- tramite un nome proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una descrizione definita che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

Il cane di Giovanni è fedele
Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe
$5^2 + 3$ *è pari*

Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc...

Ci si può riferire ad un individuo in vari modi:

- tramite un nome proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una descrizione definita che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

Il cane di Giovanni è fedele
Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe
$5^2 + 3$ *è pari*

In logica, nomi e descrizioni definite sono anche chiamati termini.

Contenuti

Quantificatori

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Tutti gli uomini sono mortali
Vi è un italiano più alto di due metri
Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

Contengono dei quantificatori: *tutti*, *ogni*, *vi è*, *almeno*.

Quantificatori

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Tutti gli uomini sono mortali
Vi è un italiano più alto di due metri
Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

Contengono dei quantificatori: *tutti*, *ogni*, *vi è*, *almeno*.

Prenderemo in considerazione soltanto due quantificatori:

- per ogni, chiamato quantificatore universale, che equivale a *tutti*, *ogni*, etc..
  "*per ogni* x, ..." significa: tutti gli individui soddisfano ...
- esiste, chiamato quantificatore esistenziale, che equivale a *vi è*, *almeno*, etc..
  "*esiste* x *tale che* ..." significa: vi è almeno un individuo che soddisfa ...

L'uso di questi due quantificatori richiede l'introduzione di lettere come x, y, z, ..., chiamate variabili individuali.

Quantificatori

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Tutti gli uomini sono mortali
Vi è un italiano più alto di due metri
Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

Contengono dei quantificatori: *tutti*, *ogni*, *vi è*, *almeno*.

Prenderemo in considerazione soltanto due quantificatori:

- per ogni, chiamato quantificatore universale, che equivale a *tutti*, *ogni*, etc..
  "*per ogni* x, ..." significa: tutti gli individui soddisfano ...
- esiste, chiamato quantificatore esistenziale, che equivale a *vi è*, *almeno*, etc..
  "*esiste* x *tale che* ..." significa: vi è almeno un individuo che soddisfa ...

L'uso di questi due quantificatori richiede l'introduzione di lettere come x, y, z, ..., chiamate variabili individuali.

TODO. Propongo di cambiare l'ordine in cui si presentano gli argomenti: prima introdurre le funzioni proposizionali, poi i quantificatori per ogni ed esiste, poi le variabili libere e vincolate, infine i quantificatori del linguaggio naturale.

Con i quantificatori del linguaggio naturale, focalizzarsi sul fatto che essi eliminano le variabili rimpiazzandoli con pronomi indefiniti

Valuate inoltre se spostare tutta questa cosa dei quatificatori quando si introdurrà la logica dei predicati.

Per ogni ed esiste (1)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali

$$\Downarrow$$

Per ogni x*, se* x *è un uomo, allora* x *è mortale.*

Per ogni ed esiste (1)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali

$\Downarrow$

Per ogni x, se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri

$\Downarrow$

Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Per ogni ed esiste (1)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali

$\Downarrow$

Per ogni x, se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri

$\Downarrow$

Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

$\Downarrow$

Per ogni x, se x è uno studente universitario, allora esiste y tale che y è un corso ed x frequenta y

Per ogni ed esiste (2)

L'uso dei quantificatori *per ogni* ed *esiste* rende esplicita la forma logica di varie proposizioni del linguaggio naturale.

Esempio (Esempio)

La proposizione

> *Per ogni* x*, se* x *è un uomo, allora* x *è mortale.*

corrisponde a

- Tutti gli uomini sono mortali
- Gli uomini sono mortali
- Ogni uomo è mortale
- Qualunque uomo è mortale
- Ciascun uomo è mortale
- L'uomo è mortale

Quantificatori vaghi e ambigui

Alcune osservazioni.

1. Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori vaghi di cui non ci occupiamo:

   Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.
   La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.

Quantificatori vaghi e ambigui

Alcune osservazioni.

1. Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori vaghi di cui non ci occupiamo:

   Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.
   La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.

2. Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

   Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.
   $$\Downarrow$$

Quantificatori vaghi e ambigui

Alcune osservazioni.

1. Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori vaghi di cui non ci occupiamo:

   Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.
   La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.

2. Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

   Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.

   $$\Downarrow$$

   Per ogni x, se x è buono esiste y tale che y ama x.

   La stessa parola "*qualcuno*" gioca due ruoli differenti da quantificatore esistenziale ed universale.

Proposizioni semplici del secondo tipo

Definizione

Le proposizioni semplici che iniziano con "*per ogni*" si dicono quantificate universalmente, quelle che iniziano con "*esiste*" si dicono quantificate esistenzialmente.

Definizione (Proposizioni semplici del secondo tipo)

Le proposizioni semplici del secondo tipo sono le proposizioni quantificate universalmente o esistenzialmente.

Proposizioni semplici del secondo tipo

Definizione

Le proposizioni semplici che iniziano con "*per ogni*" si dicono quantificate universalmente, quelle che iniziano con "*esiste*" si dicono quantificate esistenzialmente.

Definizione (Proposizioni semplici del secondo tipo)

Le proposizioni semplici del secondo tipo sono le proposizioni quantificate universalmente o esistenzialmente.

Esercizio 1.5, 1.4, 1.7

Contenuti

Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione "*Per ogni* x, *se* x *è un uomo, allora* x *è mortale*".

La frase "x *è un uomo*" è una proposizione?

Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione "*Per ogni x, se x è un uomo, allora x è mortale*".

La frase "*x è un uomo*" si chiama funzione proposizionale. Non è una proposizione perché il valore di verità dipende da chi è x. Il libro li chiama anche, a mio avviso impropriamente, predicati.

Dalla funzione proposizionale "*x e y vanno a vedere z*", possiamo ottenere altre funzioni proposizionali rimpiazzando le variabili con termini:

- *Stefano e y vanno a vedere z*
- *Stefano e y vanno a vedere il derby Milan-Inter*
- *Stefano e Marcello vanno a vedere z*
- ...

Se rimpiazzo tutte le variabili ottengo una proposizione:

- *Stefano e Marcello vanno a vedere il derby Milan-Inter*

Si dice che le variabili x, y e z, nei casi di sopra, sono libere.

Variabili vincolate

Le funzioni proposizionali possono essere trasformate in proposizioni:

- rimpiazzando variabili con termini (slide precedente);
- usando i quantificatori.

Per esempio, da "x *ama* y" otteniamo:

- *Elisa ama Massimo*
- *Esiste x tale che x ama Massimo (Vi è qualcuno che ama Massimo)*
- *Per ogni x, x ama Massimo (Tutti amano Massimo)*
- *Per ogni y, Elisa ama y (Elisa ama tutti).*

In queste frasi, non si può rimpiazzare una variable con un nome... la frase seguente non ha alcun significato:

- *Esiste Elena tale che Elena ama Massimo*

Le variabili in questo caso si dicono vincolate. I quantificatori vincolano le variabili a cui sono applicate.

Variabili libere e vincolate in matematica

Il concetto di variabile libera e vincolata non appare solo nella logica, ma anche in altre branche della matematica.

Consideriamo ad esempio la formula

$$\sum_{i=1}^{10} ij$$

In questa formula, l'operazione di sommatoria svolge lo stesso ruole del quantificatore, vincolando la variabile i. La variabile j è invece libera.

A causa di ciò, il risultato della sommatoria dipende solo dal valore di j: se eliminamo la sommatoria svolgendo il calcolo, otteniamo la formula $55j$ dove compare solo la variabile j.

Come esempio finale, anche l'operazione di integrale definisce una variabile vincolata. Ad esempio, nell'integrale

$$\int_0^1 x^2\, dx$$

x è una variabile vincolata.

2025-01-10

Variabili libere e vincolate in matematica

Il concetto di variabile libera e vincolata non appare solo nella logica, ma anche in altre branche della matematica.

Consideriamo ad esempio la formula

$$\sum_{i=1}^{10} ij$$

In questa formula, l'operazione di sommatoria svolge lo stesso ruole del quantificatore, vincolando la variabile i. La variabile j è invece libera.

A causa di ciò, il risultato della sommatoria dipende solo dal valore di j: se eliminamo la sommatoria svolgendo il calcolo, otteniamo la formula $55j$ dove compare solo la variabile j.

Come esempio finale, anche l'operazione di integrale definisce una variabile vincolata. Ad esempio, nell'integrale

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

x è una variabile vincolata.

Esercizio 1.8

Contenuti

Valore di verità di una proposizione

Nella logica delle proposizioni, per stabilire il valore di verità di una proposizione è sufficiente essere in grado di stabilire il valore di verità delle proposizioni semplici, e applicare le regole dei connettivi.

Valore di verità di una proposizione

Nella logica delle proposizioni, per stabilire il valore di verità di una proposizione è sufficiente essere in grado di stabilire il valore di verità delle proposizioni semplici, e applicare le regole dei connettivi.

Nella logica dei predicati dobbiamo:

- stabilire il valore di verità delle proposizioni semplici del primo tipo;
- applicare le regole dei connettivi;
- applicare le regole dei quantificatori.

Valore di verità di una proposizione

Nella logica delle proposizioni, per stabilire il valore di verità di una proposizione è sufficiente essere in grado di stabilire il valore di verità delle proposizioni semplici, e applicare le regole dei connettivi.

Nella logica dei predicati dobbiamo:

- stabilire il valore di verità delle proposizioni semplici del primo tipo;
- applicare le regole dei connettivi;
- applicare le regole dei quantificatori.

Vedremo ora questo aspetto in maniera informale e rimandiamo un trattamento più formale ad una lezione successiva.

Il quantificatore universale

Cosa vuol dire che una proposizione del tipo

Per ogni x, se x è un numero primo allora x è minore di 10

è vera ?

Il quantificatore universale

Cosa vuol dire che una proposizione del tipo

Per ogni x, se x è un numero primo allora x è minore di 10

è vera ?

Vuol dire che se rimpiazzo x con un numero qualunque, la proposizione che ottengo è sempre vera. Cioè vuol dire che le seguenti proposizioni sono vere:

- se 1 è un numero primo allora 1 è minore di 10
- se 2 è un numero primo allora 2 è minore di 10
- se 3 è un numero primo allora 3 è minore di 10
- ...
- se 12384 è un numero primo allora 12384 è minore di 100
- ...

Dominio di quantificazione

Possiamo notare due problemi qui:

- quali valori ha senso mettere al posto di x ? Chiaramente non ha particolarmente senso mettere il pianeta Giove al posto di x, l'unica cosa sensata sono i numeri.

  Il dominio di quantificazione è l'insieme di valori che intendiamo mettere al posto delle variabili quantificate x, ed è di solito implicitamente definito dal contesto.

Dominio di quantificazione

Possiamo notare due problemi qui:

- quali valori ha senso mettere al posto di x ? Chiaramente non ha particolarmente senso mettere il pianeta Giove al posto di x, l'unica cosa sensata sono i numeri.

  Il dominio di quantificazione è l'insieme di valori che intendiamo mettere al posto delle variabili quantificate x, ed è di solito implicitamente definito dal contesto.
- in questo caso, il dominio di quantificazione è infinito. Non è quindi veramente possibile determinare il valore di verità in questo modo, è solo una definizione teorica. Nella pratica, dovremo trovare altri modi di determinare se una proposizione è vera o falsa (dimostrazioni).
  - in questo caso specifico, in realtà, se proviamo con $x = 11$ scopriamo che la proposizione è falsa;
  - ma ci sono tante proposizioni sui numeri che non sappiamo se sono vere o fale, come la *congettura di Goldbach*

    Ognu numeri pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi

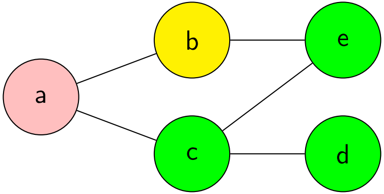
Grafi

Per evitare i problemi che abbiamo con i domini di quantificazione infiniti, faremo molti esempi usando i grafi.

Grafi

Per evitare i problemi che abbiamo con i domini di quantificazione infiniti, faremo molti esempi usando i grafi.

Un grafo è un disegno costituito da nodi collegati da linee, chiamate archi. Ad esempio, questo è un grafo:



Possiamo chiederci come calcolare il valore di verità di

Per ogni nodo x, se x è verde allora x è connesso al nodo c

Quantificatore esistenziale

La proposizione

Esiste x tale "*funzione proposizionale contenente* x"

è vera se esiste almeno un individuo che possiamo rimpiazzare al posto di x che rende vera la proposizione *funzione proposizionale contenente* x.

Quantificatore esistenziale

La proposizione

Esiste x tale "*funzione proposizionale contenente x*"

è vera se esiste almeno un individuo che possiamo rimpiazzare al posto di x che rende vera la proposizione *funzione proposizionale contenente* x.

Ad esempio, nel grafo di prima, la proposizione

Esiste x tale che x è verde.

è vera, perché se al posto x metto il nodo c ottengo

Il nodo c è verde

che è una proposizione vera.

Quantificatore universale

La proposizione

Per ogni x "*funzione proposizionale contenente x*"

è vera se qualunque individuo del dominio di quantificazione metto al posto di x, ottengo sempre una proposizione vera.

Quantificatore universale

La proposizione

Per ogni x "*funzione proposizionale contenente x*"

è vera se qualunque individuo del dominio di quantificazione metto al posto di x, ottengo sempre una proposizione vera.

Ad esempio, nel grafo di prima, la proposizione

Per ogni x, x è verde.

è vera. Infatti se, rimpiazzo x con i nodi del grafo ottengo:

- il nodo a è verde
- il nodo b è verde
- il nodo c è verde
- il nodo d è verde
- il nodo e è verde

ma queste proposizioni non sono tutte vere.