

**Prova scritta di Matematica Generale CLEA (9 CFU)  
del 03/02/2017**

*L'esercizio 1 va svolto perfettamente prima di passare agli altri.  
In presenza di errori nell'esercizio 1, il compito verrà considerato insufficiente.*

**Esercizio 1:** Dati gli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(3-x) < 0\} \quad B = [-1, 3] \quad C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid 3^{\frac{1}{x-1}}(2-x^2) \geq 0\right\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln(x) + \ln(4-x) \in \mathbb{R}\}$$

- 1) dire, motivando le risposte, se  $B \subseteq A$  e  $C \subseteq B$ .
- 2) determinare sul piano cartesiano l'insieme  $C \times B$ ;
- 3) determinare  $A \cup B$ ,  $C \cap D$  e  $D \setminus A$ .

**Esercizio 2:** Data la funzione  $f(x) = \frac{2e^x - 1}{3e^x}$  determinare:

- 1) il dominio di  $f(x)$ ;
- 2) il segno di  $f(x)$ ;
- 3) gli eventuali asintoti di  $f(x)$ ;
- 4) gli intervalli di crescita e decrescenza di  $f(x)$ ;
- 5) eventuali punti di massimo e minimo locali e globali di  $f(x)$ ;
- 6) gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali flessi di  $f(x)$ ;
- 7) il grafico di  $f(x)$ ;
- 8) il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $\left(1, \frac{2e-1}{3e}\right)$ .

**Esercizio 3:** Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x) = 3 - (x+2)(x-3)$  e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(-4, 0)$ .

**Esercizio 4:** Calcolare gli integrali  $\int \frac{2}{x(\ln x)^2} dx$  e  $\int \frac{x^2+1}{2x} dx$

**Esercizio 5:** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. calcolare il determinante  $\det A$  e il rango  $\text{rk} A$ ;
2. dire, motivando la risposta, se  $A$  è invertibile;
3. dire, motivando la risposta, quante soluzioni ammette il sistema lineare di equazioni 
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -x + y - 2z = -1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

*(Facoltativo: In caso di esistenza, calcolare le soluzioni con il metodo di Cramer)*

**Esercizio 6:** Data la funzione  $f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2$  determinarne il dominio e gli eventuali punti critici, studiandone la natura.