Logica – a.a. 2024/25 – Compito del 11/02/2025

prof. Gianluca Amato

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Esercizio 1 (8 punti)

Verificare se le seguenti regole d'inferenza sono corrette usando le tavole di verità.

$$\frac{A \land \neg A}{B} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} A \to (B \leftrightarrow C) \\ C \lor A \end{array}}{B}$$

Si consideri inoltre la seguente regola d'inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \lor C \\ B \to D \\ C \to D \end{array}}{A \to D}$$

a.a. 2024/25: se ne dia una dimostrazione in deduzione naturale.

a.a. precedenti: se ne verifichi la correttezza usando le tavole di verità o il metodo del controesempio.

Esercizio 2 (8 punti)

Determinare la forma logica della seguente inferenza. Il dominio del discorso sono i personaggi di un famoso manga (ma, al solito, conoscerlo non aiuta in nessun modo a svolgere l'esercizio).

> *Goku e Radish sono Saiyan. Crilin è il più forte essere umano. Chiunque sia più forte di almeno un Saiyan è anche più forte di tutti gli esseri umani. Il maestro Muten non è più forte di Crilin. Pertanto, il maestro Muten non è più forte di alcun Saiyan.*

Svolgere inoltre, a vostra scelta, uno di questi due punti:

1. dare un modello che rende vere tutte le formule individuate in precedenza;
2. dare una dimostrazione dell'inferenza usando la deduzione naturale.

Soluzioni esercizio 1

Questa è la tavola di verità per la regola d'inferenza $A \land \neg A \vdash B$:

A	B	$A \land \neg A$	B
F	F	F	F
F	V	F	V
V	F	F	F
V	V	F	V

Notare che non esiste nessuna riga in cui la premessa ($A \land \neg A$) è vera e la conclusione (B) è falsa. Quindi la regola d'inferenza è corretta.

Questa invece è la tavola di verità per la regola d'inferenza $A \to (B \leftrightarrow C), C \lor A \vdash B$:

A	B	C	$A \to (B \leftrightarrow C)$	$C \lor A$	B
F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V
V	V	V	V	V	V

In questo caso esiste almeno una riga (ce ne sono due in realtà, evidenziate in rosso) in cui le premesse sono entrambe vere ma la conclusione è falsa, quindi la regola d'inferenza è errata.

Per l'ultimo punto dell'esercizio, svolgo solo la variante per l'a.a. 2024/25, perché la variante per gli a.a si risolve in maniera analoga a quanto fatto per le prime due inferenze, con l'unica differenza che la tabella è molto più grande.

Questa è la dimostrazione in deduzione naturale di $A \to B \lor C, B \to D, C \to D \vdash A \to D$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad A \to B \lor C}{B \lor C}\,\mathrm{E}{\to} \qquad \dfrac{[B] \qquad B \to D}{D}\,E \to \qquad \dfrac{[C] \qquad C \to D}{D}\,\mathrm{E}{\to}}{D}\,\mathrm{E}{\lor}}{A \to D}\,\mathrm{I}{\to}$$

Spiegazione della dimostrazione in deduzione naturale

Proviamo adesso a descrivere a parole come si può arrivare a ottenere questa dimostrazione. Tutto ciò che segue non fa parte della soluzione, è qui solo a fini didattici.

Quello che vogliamo ottenere è una dimostrazione di $A \to D$ partendo dalle premesse $A \to B \lor C$, $B \to D$ e $C \to D$. Quindi qualcosa di questo tipo:

$$\dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{A \to D}$$

dove indichiamo con la riga punteggiata una dimostrazione ancora da scrivere, nella quale possiamo utilizzare le premesse dell'inferenza. Per dimostrare $A \to D$, assumiamo A e proviamo a dimostrare D. Dal punto di vista della deduzione naturale, questo vuol dire usare la regola d'introduzione dell'implicazione come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ D\end{array}}{A \to D}\ \mathrm{I}\!\to$$

dove la $[A]$ sopra la linea punteggiata sta a indicare che oltre alle premesse solite si può anche utilizzare la formula A, che poi cancelleremo. Esaminando le ipotesi che abbiamo a disposizione, vediamo che da A e da $A \to B \lor C$, tramite *modus ponens* (che nella deduzione naturale è la regola di eliminazione dell'implicazione) possiamo ottenere $B \lor C$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[A] \qquad A \to B \lor C}{B \lor C}\ \mathrm{E}\!\to \qquad [A]\\ \vdots\\ D\end{array}}{A \to D}\ \mathrm{I}\!\to$$

Adesso, visto che abbiamo dimostrato $B \lor C$, possiamo fare un ragionamento per casi: consideriamo separatamente il caso in cui B è vero e quello in cui C è vero, e in entrambi i casi proviamo a dimostrare D. Nella deduzione naturale, questa è la regola di eliminazione della disgiunzione. Otteniamo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad A \to B \lor C}{B \lor C}\ \mathrm{E}\!\to \qquad \begin{array}{c}[A] \quad [B]\\ \vdots\\ D\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A] \quad [C]\\ \vdots\\ D\end{array}}{D}\ \mathrm{E}\lor}{A \to D}\ \mathrm{I}\!\to$$

A questo punto i due buchi nella dimostrazione ancora da scrivere sono semplici applicazioni del modus ponens: il primo tra $[B]$ e $B \to D$, il secondo tra $[C]$ e $C \to D$, e questo ci porta alla dimostrazione completa.

Soluzioni esercizio 2

Leggendo attentamente il testo, si possono individuare i seguenti predicati:

- Sx: x è un Saiyan
- Ux: x è un essere umano
- Fxy: x è più forte di y

e le seguenti costanti individuali:

- g: Goku
- r: Radish
- c: Crilin

- m: maestro Muten

Usando questi simboli, le proposizioni che compaiono nell'inferenza hanno la seguente forma logica:

1. Goku e Radish sono Saiyan: $Sg \wedge Sr$.
2. Crilin è il più forte essere umano: $Uc \wedge \forall x(Ux \to Fcx)$.

   Attenzione che dire "*Crilin è il più forte essere umano*" vuol dire sia che "*Crilin è un essere umano*", in formule Uc, sia che "*Crilin è più forte di tutti gli esseri umani*", in formule $\forall x(Ux \to Fcx)$.
3. Chiunque sia più forte di almeno un Saiyan è anche più forte di tutti gli esseri umani: $\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy))$.

   Notare che esistono formule diverse che sono equivalenti a questa, ad esempio: $\forall x\forall y\forall z((Sy \wedge Fxy) \to (Uz \to Fxz))$.
4. Il maestro Muten non è più forte di Crilin: $\neg Fmc$.
5. Il maestro Muten non è più forte di alcun Saiyan: $\forall x(Sx \to \neg Fmx)$.

   Anche qui si potrebbe scrivere la stessa cosa in molto modi equivalenti, ad esempio: $\neg\exists x(Sx \wedge Fmx)$.

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, vediamo entrambe le varianti.

Dimostrazione in deduzione naturale

Dobbiamo scrivere una dimostrazione di

$$Sg \wedge Sr, Uc \wedge \forall x(Ux \to Fcx), \forall x((\exists y Sy \wedge Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy)), \neg Fmc \vdash \forall x(Sx \to \neg Fmx)$$

Come al solito, consideriamo $\neg\phi$ semplicemente come un abbreviazione di $\phi \to \bot$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Uc \wedge \forall x(Ux \to Fcx)$}
\RightLabel{E$\wedge$}
\UnaryInfC{Uc}
\AxiomC{$[Sa]$}
\AxiomC{$[Fma]$}
\RightLabel{I$\wedge$}
\BinaryInfC{$Sa \wedge Fma$}
\RightLabel{I$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists y(Sy \wedge Fmy)$}
\AxiomC{$\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy))$}
\RightLabel{E$\forall$}
\UnaryInfC{$\exists y(Sy \wedge Fmy) \to \forall y(Uy \to Fmy)$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\forall y(Uy \to Fmy)$}
\RightLabel{E$\forall$}
\UnaryInfC{$Uc \to Fmc$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{Fmc}
\AxiomC{$\neg Fmc$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{I$\to$}
\UnaryInfC{$\neg Fma$}
\RightLabel{$\to$}
\UnaryInfC{$Sa \to \neg Fma$}
\RightLabel{I$\forall$}
\UnaryInfC{$\forall x(Sx \to \neg Fmx)$}
\end{prooftree}
$$

Notare che la dimostrazione non usa la formula $Sg \wedge Sr$, che non è quindi necessaria per arrivare alla conclusione.

Spiegazione della dimostrazione in deduzione naturale

Come nell'esercizio 1, vediamo di spiegare come si arriva a questa dimostrazione. Per facilitare l'intuizione, faremo riferimento al significato che i simboli hanno nel testo in italiano originario, anche se la dimostrazione in deduzione naturale è scritta esclusivamente sulla base delle formule e non dipende dalla loro interpretazione. Inizialmente, dobbiamo dimostrare che Muten non è più forte di nessun Saiyan, ovvero:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x(Sx \to \neg Fmx) \end{array}$$

Per dimostrare questa cosa, se dovessimo scrivere la dimostrazione in italiano corrente, diremmo qualcosa del genere: "*prendo un Saiyan arbitrario (che chiamo a, e di cui non so nulla, tranne il fatto che è un Saiyan) e provo a dimostrare che Muten non è più forte di a*". Per tradurre questo ragionamento in deduzione naturale procediamo in due passi. Prima applichiamo la regola d'introduzione del quantificatore universale, che consiste nell'introdurre un personaggio generico a di cui non sappiamo assolutamente nulla, neanche che è un Saiyan: per questo signor a dobbiamo dimostrare che se è un Saiyan, allora Muten non è più forte di lui:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ Sa \to \neg Fma \end{array}}{\forall x(Sx \to \neg Fmx)}\ \mathrm{I}\forall$$

Quindi applichiamo la regola d'introduzione dell'implicazione, che vuol dire assumere che a sia effettivamente un Saiyan, e dimostrare che Muten non è più forte di a:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} [\mathrm{Sa}] \\ \vdots \\ \neg Fma \end{array}}{Sa \to \neg Fma}\ \mathrm{I}{\to}}{\forall x(Sx \to \neg Fmx)}\ \mathrm{I}\forall$$

Ora ricordiamo che nella deduzione naturale trattiamo $\neg Fma$ come una abbreviazione di $Fma \to \bot$. Effettivamente, dire che Fma è falso ($\neg Fma$) è la stessa cosa di dire che se Fma fosse vero, ci sarebbe una contraddizione ($Fma \to \bot$). Quindi, per dimostrare $Fma \to \bot$, assumiamo che Fma sia vero e proviamo a verificare che questo porta a una contraddizione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} [\mathrm{Sa}] \qquad [\mathrm{Fma}] \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg Fma}\ \mathrm{I}{\to}}{Sa \to \neg Fma}\ \mathrm{I}{\to}}{\forall x(Sx \to \neg Fmx)}\ \mathrm{I}\forall \tag{**}$$

Fino a ora, nel tentativo di cercare una dimostrazione, abbiamo proceduto all'indietro, dalla conclusione verso le premesse. Adesso, visto che non esiste nessuna regola d'introduzione di $\bot$, è il momento di cambiare direzione, vediamo cosa abbiamo a disposizione (le premesse dell'inferenza e le assunzioni Sa e Fma) e vediamo se combinandole assieme riusciamo a dimostrare $\bot$.

Scriviamo prima la dimostrazione in italiano, poi proviamo a tradurla in deduzione naturale. Abbiamo appena assunto che a è un Saiyan, e che Muten è più forte di a. Ma allora, poiché "*Chiunque sia più forte di almeno un Saiyan è anche più forte di tutti gli esseri umani*", vuol dire che Muten è più forte di tutti gli essere umani. Quindi, in particolare, sarà più forte di Crilin. Ma questo è assurdo, perché contraddice la premessa in cui diciamo che Muten non è più forte di Crilin.

Quindi, prima di tutto da Sa e Fma possiamo dedurre che esiste almeno un Saiyan di cui Muten è più forte:

$$\dfrac{\dfrac{[\mathrm{Sa}] \qquad [\mathrm{Fma}]}{Sa \wedge Fma}\,\mathrm{I}\wedge}{\exists y(Sy \wedge Fmy)}\,\mathrm{I}\exists$$

D'altronde, da "*Chiunque sia più forte di almeno un Saiyan è anche più forte di tutti gli esseri umani*" otteniamo immediatamente che "*Se Muten è più forte di almeno un Saiyan, allora è più forte di tutti gli esseri umani*":

$$\dfrac{\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fxy))}{\exists y(Sy \wedge Fmy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}\forall$$

Combinando i risultati di queste due dimostrazioni con il modulo ponens, otteniamo che Muten è più forte di tutti gli esseri umani:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Sa] \qquad [Fma]}{Sa \wedge Fma}\,\mathrm{I}\wedge}{\exists y(Sy \wedge Fmy)}\,\mathrm{I}\exists \qquad \dfrac{\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fxy))}{\exists y(Sy \wedge Fmy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}\forall}{\forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}{\rightarrow}$$

Da qui, possiamo dedurre che Muten è più forte di Crilin: prima applichiamo la regola di eliminazione del $\forall$, rimpiazzando la variabile x con il valore specifico c, ottenendo che "*se Crilin è umano, allora Muten è più forte di Crilin*".

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Sa] \qquad [Fma]}{Sa \wedge Fma}\,\mathrm{I}\wedge}{\exists y(Sy \wedge Fmy)}\,\mathrm{I}\exists \qquad \dfrac{\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fxy))}{\exists y(Sy \wedge Fmy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}\forall}{\forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}{\rightarrow}}{Uc \rightarrow Fmc}\,\mathrm{E}\forall$$

Effettivamente Crilin è umano, ma la formula Uc che ci serve dobbiamo ricavarla dalla premessa $Uc \wedge \forall x(Ux \rightarrow Fcx)$ tramite la regola di eliminazione del $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{Uc \wedge \forall x(Ux \rightarrow Fcx)}{Uc}\,\mathrm{E}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Sa] \qquad [Fma]}{Sa \wedge Fma}\,\mathrm{I}\wedge}{\exists y(Sy \wedge Fmy)}\,\mathrm{I}\exists \qquad \dfrac{\forall x(\exists y(Sy \wedge Fxy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fxy))}{\exists y(Sy \wedge Fmy) \rightarrow \forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}\forall}{\forall y(Uy \rightarrow Fmy)}\,\mathrm{E}{\rightarrow}}{Uc \rightarrow Fmc}\,\mathrm{E}\forall}{Fmc}\,\mathrm{E}{\rightarrow}$$

Il fatto che Muten sia più forte di Crilin (Fmc) contraddice la premessa che "Muten non è più forte di Crilin" ($\neg Fmc$ o, nella forma equivalente, $Fmc \rightarrow \bot$), e tramite modus ponens otteniamo finalmente la contraddizione che cercavamo:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Uc \land \forall x(Ux \to Fcx)$}
\RightLabel{E$\land$}
\UnaryInfC{Uc}
\AxiomC{$[Sa]$}
\AxiomC{$[Fma]$}
\RightLabel{I$\land$}
\BinaryInfC{$Sa \land Fma$}
\RightLabel{I$\exists$}
\UnaryInfC{$\exists y(Sy \land Fmy)$}
\AxiomC{$\forall x(\exists y(Sy \land Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy))$}
\RightLabel{E$\forall$}
\UnaryInfC{$\exists y(Sy \land Fmy) \to \forall y(Uy \to Fmy)$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\forall y(Uy \to Fmy)$}
\RightLabel{E$\forall$}
\UnaryInfC{$Uc \to Fmc$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{Fmc}
\AxiomC{$\neg Fmc$}
\RightLabel{E$\to$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}
$$

Basta adesso attaccare tra di loro questa dimostrazione e quella marcata con (**) a pagina 5 e otteniamo la dimostrazione finale.

Modello che rende vere le formule

Vediamo tre modelli diversi, uno che sarà espresso in termini più familiari agli studenti degli a.a. 2023/24 e precedenti, gli altri che saranno invece espressi in termini più familiari agli studenti dell'a.a. 2024/25.

Modello 1: modello espresso formalmente usando gli insiemi

Definiamo una interpretazione $\mathcal{I}$ per la segnatura composta dai simboli U, S, F, etc... Il dominio dell'interpretazione è l'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$, mentre il significato dei simboli è il seguente:

- $\mathcal{I}(S) = \{1, 2\}$;
- $\mathcal{I}(U) = \{3, 4\}$;
- $\mathcal{I}(F) = \{(3, 3), (3, 4)\}$;
- $\mathcal{I}(g) = 1$;
- $\mathcal{I}(r) = 2$;
- $\mathcal{I}(c) = 3$;
- $\mathcal{I}(m) = 4$.

Adesso è possibile verificare che tutte le formule sono vere in $\mathcal{I}$ (e che quindi $\mathcal{I}$ è effettivamente un modello):

1. $Sg \land Sr$: vera perché $1 \in \mathcal{I}(S)$ e $2 \in \mathcal{I}(S)$;
2. $Uc \land \forall x(Ux \to Fcx)$: vera perché $\mathcal{I}(c) = 3 \in \mathcal{I}(U)$ e sia $(3, 3)$ che $(3, 4)$ sono in $\mathcal{I}(F)$;
3. $\forall x((\exists y Sy \land Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy))$ è vera in maniera banale perché la formula $\exists y Sy \land Fxy$ è falsa per tutti gli x: non esiste nessuna coppia che ha 1 o 2 come secondo argomento in $\mathcal{I}(F)$;
4. $\neg Fmc$ è vera perché $(4, 3) \notin \mathcal{I}(F)$;
5. $\forall x(Sx \to \neg Fmx)$ è vera perché né la coppia $(4, 1)$ né la $(4, 2)$ sono in $\mathcal{I}(F)$.

Modello 2: numeri naturali

Visto che nell'a.a 2024/25 abbiamo saltato la parte su come formalizzare un modello utilizzando gli insiemi, dobbiamo ricorrere a un modello descritto con il linguaggio naturale.

Identifichiamo il dominio di quantificazione con l'insieme dei numeri naturali, e siamo il seguente significato alle costanti predicative e individuali:

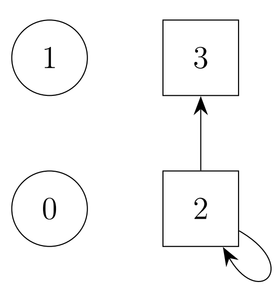
- Sx: x è maggiore o uguale a 11
- Ux: x è minore o uguale a 10
- Fxy: x è maggiore o uguale a y
- g: 100
- r: 50
- c: 10
- m: 5

Adesso è possibile verificare che tutte le formule sono vere in questa interpretazione:

1. $Sg \wedge Sr$: vera perché sia 100 che 50 sono maggiori di 10;
2. $Uc \wedge \forall x(Ux \to Fcx)$: vera perché 10 è minore o uguale a 10, e qualunque numero x prendo, se questo numero soddisfa U (quindi è minore o uguale a 10), allora Fcx (ovvero 10 è maggiore o uguale ad x).
3. $\forall x((\exists y Sy \wedge Fxy) \to \forall y(Uy \to Fxy))$: vera perché se un certo x soddisfa $\exists y Sy \wedge Fxy$ vuol dire che è più grande di un numero $y \geq 11$, quindi x anche $x \geq 10$. Ma allora è ovvio che x è più grande di tutti i numeri che soddisfano il predicato U, cioè di tutti i numero minori o uguali a 10;
4. $\neg Fmc$ è vera perché 5 non è maggiore o uguale a 10;
5. $\forall x(Sx \to \neg Fmx)$ è vera perché 5 è più piccolo di tutti i numero che soddisfano la proprietà S, visto che i numeri che soddisfano S sono tutti maggiori o uguali a 11.

Modello 3: grafi

Una alternativa è usare dei grafi come modello, come fatto in esercizi precedenti. Consideriamo quindi il seguente grafo:



e il seguente significato per i simboli:

- Sx: il nodo x è tondo
- Ux: il nodo x è quadrato
- Fxy: c'è una freccia da nodo x al nodo y
- g: nodo 0
- r: nodo 1
- c: nodo 2
- m: nodo 3

La verifica che tutte le formule siano vere in questo modello è analoga a quella fatta per il modello basato sui numeri naturali.

Osservazione finale

Qualunque strada si scelga, è importante che il nuovo modello usi gli stessi simboli di costanti predicative (U, S, F) e individuali (g, r, c, m) che avete usato per trovare le formule nella prima parte dell'esercizio. Non dovete cambiare questi simboli perché quello che dovete fare è scrivere una diversa interpretazione per esattamente le stesse formule che avete già individuato.

LMC & HTML – a.a. 2024/25 – Compito del 11/02/2025

prof. Gianluca Amato

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Esercizio 1 (8 punti)

Scrivere un programma per il LMC che prende in input due numeri n e i, e produce in output la sequenza di numeri 0, i, $2i$, $3i$, ... fino ad arrivare al massimo al numero n. Ad esempio, se $n = 10$ e $i = 3$, il programma dovrebbe produrre in output la sequenza 0, 3, 6, 9.

Esercizio 2 (8 punti)

Si realizzi in linguaggio HTML il seguente elenco annidato:

- Corsi di laurea area economica
  1. CLEII
  2. CLEC
- Corsi di laurea magistrali
  1. CLEC/M
  2. CLEBA

dove "CLEII" è un link al sito `cleii.unich.it`. Si progetti una classe CSS che imposti il colore del carattere rosso e lo sfondo giallo. Si mostri l'utilizzo della classe nell'elenco numerato di cui sopra, attivandola per gli ultimi due elementi.