Matematica generale CLEII
Esercitazione del 13 dicembre 2017

Maurizio Parton

1. Dati gli insiemi $A = (-\infty, 2]$, $B = \{1, 2\}$ e $C = [0, 5)$, determinare:
   - $(A \setminus C) \cup B$;
   - $(A \setminus B) \cup C$;
   - $(A \setminus B) \cap C$;
   - $(C \setminus B) \cap A$.
2. Dato l'insieme $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } z = x^2 + 2x + 1 + y^2\}$, dire se il punto $(1, 3, 5)$ appartiene a S.
3. Risolvere la disequazione $(x^2 + 2x - 8)(x + 1) > 0$.
4. Partendo dal grafico della funzione elementare $y = \ln(x)$, disegnare il grafico della funzione $f(x) = -(\ln(-x + 1) - 1)$ *senza fare lo studio di funzione*. Usare poi il grafico trovato per determinare *in maniera grafica* dominio e immagine di f.
5. Calcolare
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^4 - x^2 + 2}$$
6. Calcolare
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x^4 - x^2 + 2}$$
7. Data la funzione $f(x) = xe^x$, calcolare il suo polinomio di Taylor di ordine 1 nel punto e.
8. Data la funzione $f(x) = x^2 + x$, calcolare il suo polinomio di Taylor di ordine 7 nel punto e.
9. Calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$
10. Disegnare il grafico della seguente funzione:
$$f(x) := x^2 e^{x^2}$$
11. Disegnare il grafico della seguente funzione:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^{x^2} \text{ if } x > 0 \\ -x \text{ if } x \leq 0 \end{cases}$$
12. Trovare una funzione f la cui derivata f' è xe^{3x^2}.
13. Calcolare l'area delimitata dalla curva $y = xe^{3x^2}$, dall'asse x, e dalle rette verticali $x = 1$ e $x = 5$.
14. Calcolare $\int_{-5}^{-2} f(x)dx$, dove f è la funzione del punto (11).
15. Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(2, 103]$ della seguente funzione:
$$f(x) := \ln \sqrt{|x|}$$
16. Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{|x|}$ assume il valore 1 nell'intervallo $[1, e^2]$.

Girare pagina

17. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza D; (b) punti di accumulazione di D; (c) punti di D in cui f è continua; (d) zeri; (e) intersezioni con gli assi; (f) segno; (g) punti di D in cui f è discontinua; (h) limiti; (i) asintoti; (j) punti stazionari; (k) monotonia; (l) estremi locali e globali; (m) tangenti destra e sinistra in 2; (n) punti di D in cui f non è derivabile; (o) punti di flesso.

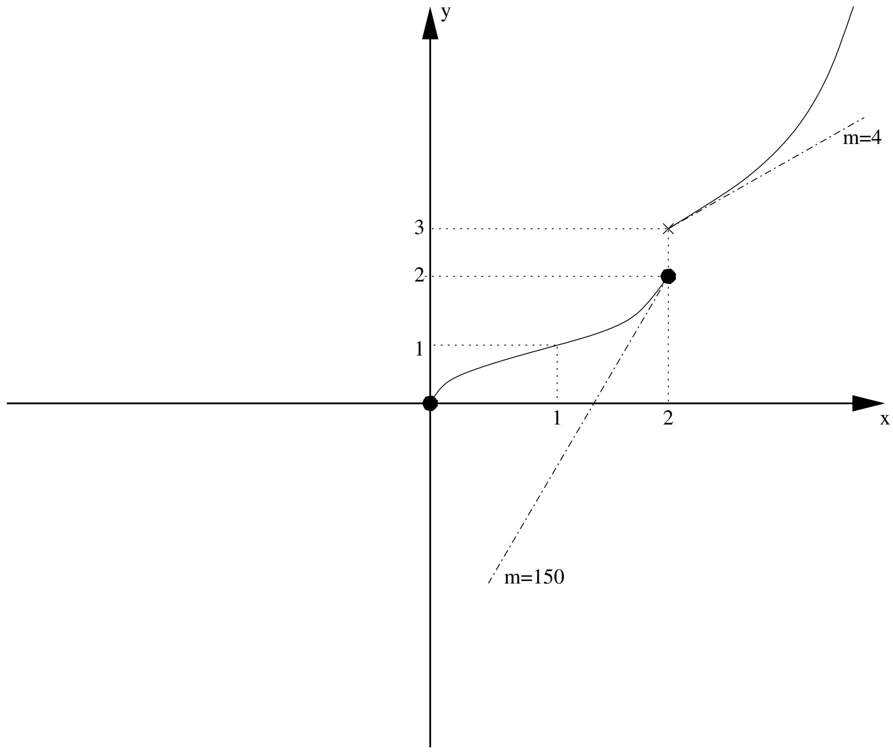

Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

18. Si considerino il dominio in $\mathbb{R}^2$ dato da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$ e la funzione

$$f(x, y) = e^{xy}$$

(a) Dire se esiste un massimo e/o un minimo assoluto di f sul bordo ∂D di D, ed eventualmente trovarli.

(b) Trovare i punti stazionari di f nei punti interni $\overset{\circ}{D}$ di D.

(c) Calcolare la matrice Hessiana $\mathcal{H}_f(0, 0)$ di f nel punto $(0, 0)$.

(d) Calcolare gli autovalori di $\mathcal{H}_f(0, 0)$.

(e) Usare (18c) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella, *senza usare gli autovalori.*

(f) Usare gli autovalori calcolati in (18d) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella.

(g) Usare (a), (b), (c) e (d) per calcolare i massimi e i minimi assoluti di f nel dominio D.