

Matematica generale CLEII

Compito dell'8 febbraio 2018

Maurizio Parton

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

L'esercizio 1 va svolto *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori nell'esercizio 1 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Dati gli insiemi $A = (-\infty, 2]$, $B = \{1, 2\}$ e $C = [0, 5)$, determinare:

- $(A \setminus C) \cup B$;
- $(A \setminus B) \cup C$;
- $(A \setminus B) \cap C$;
- $(C \setminus B) \cap A$.

Suggerimento: aiutarsi con la rappresentazione dei numeri sulla retta reale.

2. Partendo dal grafico della funzione elementare $y = e^x$, disegnare il grafico della funzione $f(x) = e^{-x+3} - 1$ *senza fare lo studio di funzione*. Usare poi il grafico trovato per determinare *in maniera grafica* dominio e immagine di f .

3. Studiare la funzione seguente e disegnarne il grafico:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Trovare una funzione f la cui derivata f' è $x(x+2)e^x$ e che soddisfa $f(0) = 42$. Quante funzioni esistono che soddisfano entrambe queste condizioni?
5. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza D ; (c) punti di D in cui f è continua; (d) zeri; (e) intersezioni con gli assi; (f) segno; (g) punti di D in cui f è discontinua; (h) limiti; (k) monotonia; (l) estremi locali e globali; (m) tangenti destra e sinistra in 0; (n) punti di D in cui f non è derivabile; (o) punti di flesso.

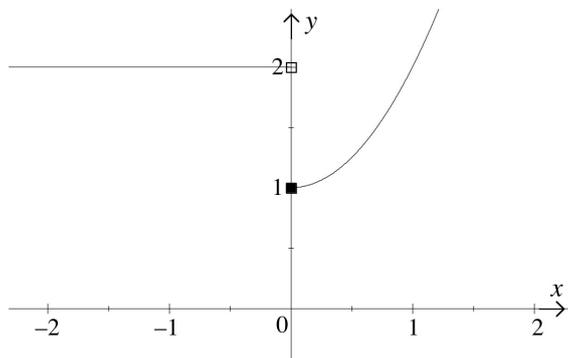


Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

6. Si considerino il dominio in \mathbb{R}^2 dato da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$ e la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$$

- Dire se esiste un massimo e/o un minimo assoluto di f sul bordo ∂D di D , ed eventualmente trovarli.
- Trovare i punti stazionari di f nei punti interni $\overset{\circ}{D}$ di D .
- Calcolare la matrice Hessiana $\mathcal{H}_f(1, 0)$ di f nel punto $(1, 0)$.
- Calcolare gli autovalori di $\mathcal{H}_f(1, 0)$.
- Usare (6c) per dire se $(1, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella, *senza usare gli autovalori*.
- Usare gli autovalori calcolati in (6d) per dire se $(1, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella.
- Usare (a), (b), (c) e (d) per calcolare i massimi e i minimi assoluti di f nel dominio D .