

Matematica generale CLEII, 30 maggio 2018

Maurizio Parton

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

L'esercizio 1 va svolto *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori nell'esercizio 1 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 + 1 \leq 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \sin(x^2 + 2x) \in [-1, 1]\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x \text{ è dispari}\}$, determinare:

- $(A \setminus C) \cup B$;
- $(A \setminus C) \cap B$;
- $\mathbb{R} \setminus (A \cap C)$;
- $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus C)$.

Suggerimento: aiutarsi con la rappresentazione dei numeri sulla retta reale.

2. Partendo dal grafico della funzione elementare $y = \exp(x)$, disegnare il grafico della funzione $f(x) = -\exp(x - 1) + 3$ *senza fare lo studio di funzione*. Usare poi il grafico trovato per determinare *in maniera grafica* dominio e immagine di f .
3. Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} x \ln(x) & \text{if } x > 0 \\ -x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

4. Trovare una funzione f la cui derivata f' è $\ln(x) + 1$.

5. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare:

- (a) campo d'esistenza D ;
- (b) punti di D in cui f è continua/discontinua;
- (c) zeri e intersezioni con gli assi;
- (d) segno e monotonia;
- (e) estremi locali e globali;
- (f) punti di D in cui f non è derivabile;
- (g) punti di D in cui la funzione cambia concavità.

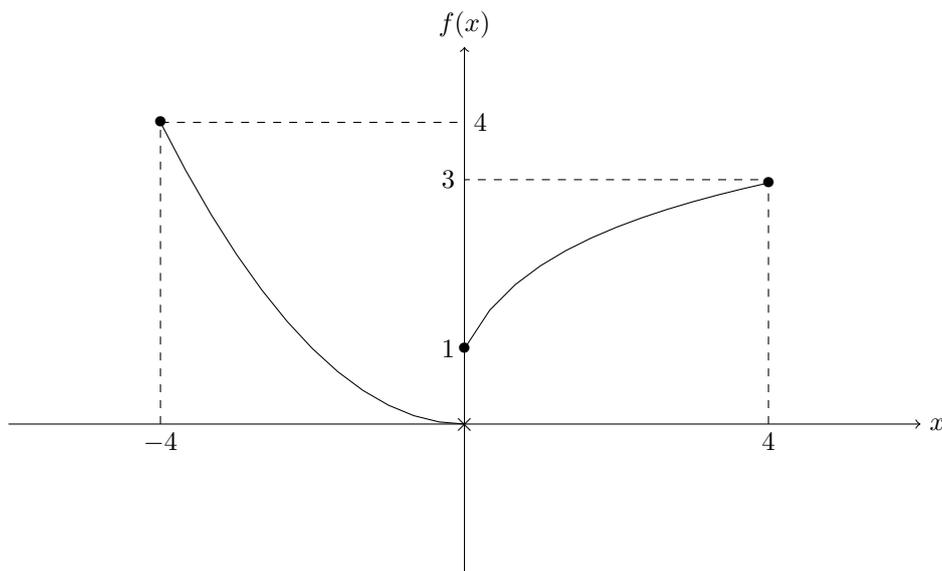


Figura 1: Determinare proprietà della funzione che genera questo grafico

Girare pagina, c'è un ultimo esercizio!

6. Si considerino il dominio in \mathbb{R}^2 dato da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$ e la funzione

$$f(x, y) = e^{xy}$$

- (a) Dire se esiste un massimo e/o un minimo assoluto di f sul bordo ∂D di D , ed eventualmente trovarli.
- (b) Trovare i punti stazionari di f nei punti interni $\overset{\circ}{D}$ di D .
- (c) Calcolare la matrice Hessiana $\mathcal{H}_f(0, 0)$ di f nel punto $(0, 0)$.
- (d) Calcolare gli autovalori di $\mathcal{H}_f(0, 0)$.
- (e) Usare (6c) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella, *senza usare gli autovalori*.
- (f) Usare gli autovalori calcolati in (6d) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella.
- (g) Usare (a), (b), (c) e (d) per calcolare i massimi e i minimi assoluti di f nel dominio D .

Fine del compito :-)