Matematica generale CLEII, 2 luglio 2018

Maurizio Parton

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.
L'esercizio 1 va svolto *perfettamente* prima di passare agli altri.
In presenza di errori nell'esercizio 1 *il compito verrà considerato insufficiente.*

1. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \sin(x^2 + 2x) \in [-1, 1]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 + 1 \leq 10\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x \text{ è dispari}\}$, determinare:
   - $A \setminus C$;
   - $(A \setminus C) \cap B$;
   - $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$;
   - $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B)$.

   Suggerimento: aiutarsi con la rappresentazione dei numeri sulla retta reale.

2. Partendo dal grafico della funzione elementare $y = \exp(x)$, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \exp(x-1)+3$ *senza fare lo studio di funzione.* Usare poi il grafico trovato per determinare *in maniera grafica* dominio e immagine di f.

3. Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

4. Trovare una funzione $f(x)$ la cui derivata $f'(x)$ è $\exp(-x)/(1 + \exp(-x))^2$.

5. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare:
   (a) campo d'esistenza D;
   (b) punti di D in cui f è continua/discontinua;
   (c) zeri e intersezioni con gli assi;
   (d) segno e monotonia;
   (e) estremi locali e globali;
   (f) punti di D in cui f non è derivabile;
   (g) punti di D in cui la funzione cambia concavità.

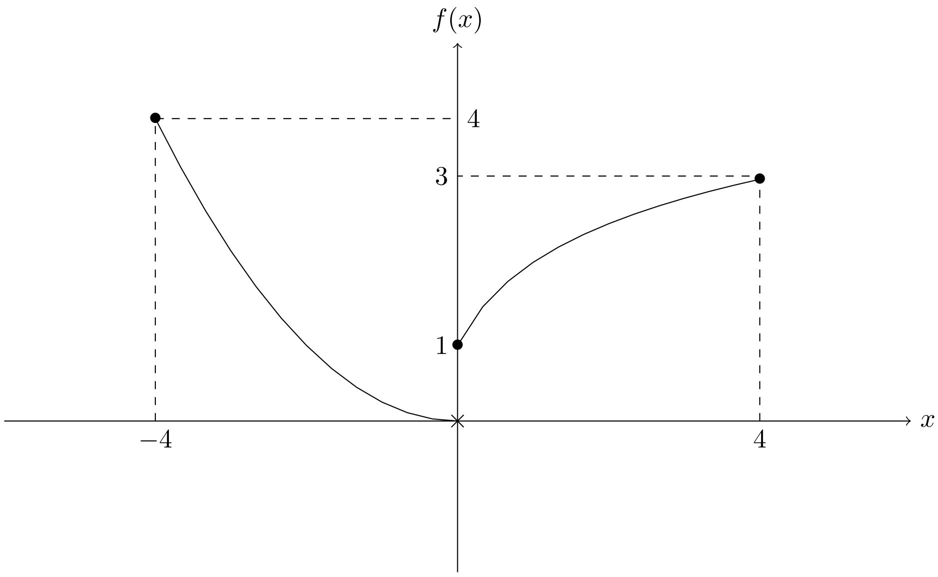

Figura 1: Determinare proprietà della funzione che genera questo grafico

Girare pagina, c'è un ultimo esercizio!

6. Si considerino il dominio in $\mathbb{R}^2$ dato da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x^2 - 1 \le y \le 3\}$ e la funzione

$$f(x, y) = e^{xy}$$

(a) Dire se esiste un massimo e/o un minimo assoluto di f sul bordo ∂D di D, ed eventualmente trovarli.

(b) Trovare i punti stazionari di f nei punti interni $\overset{\circ}{D}$ di D.

(c) Calcolare la matrice Hessiana $\mathcal{H}_f(0, 0)$ di f nel punto $(0, 0)$.

(d) Calcolare gli autovalori di $\mathcal{H}_f(0, 0)$.

(e) Usare (6c) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella, *senza usare gli autovalori.*

(f) Usare gli autovalori calcolati in (6d) per dire se $(0, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella.

(g) Usare (a), (b), (c) e (d) per calcolare i massimi e i minimi assoluti di f nel dominio D.

Fine del compito :-)