Misurazione e valutazione delle *performance*

Lezione 3

Metodi di misurazione dell'efficienza tecnica

Marialisa Mazzocchitti
Università degli Studi «G. d'Annunzio» di Chieti-Pescara

Agenda

1. La rappresentazione della tecnologia di produzione (Parte 2)
2. Approcci alla misurazione dell'efficienza tecnica
3. Data Envelopment Analysis

La rappresentazione della tecnologia di produzione (Parte 2)

Insieme delle possibilità produttive (1/4)

- Una formulazione generale della tecnologia di produzione nel caso di attività multi-fattore e multi-prodotto è possibile con riferimento all'insieme delle possibilità produttive (*production possibility set*), ossia l'insieme $\mathbf{Z}$ di tutte le combinazioni di input e output tecnicamente possibili
- Tale rappresentazione della tecnologia richiede solo la conoscenza delle variabili di quantità degli output prodotti e degli input impiegati
- Siano:

  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_S) \in R_+^S$ il vettore degli input

  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_M) \in R_+^M$ il vettore degli output

  il set o *grapho* delle possibilità produttive

  $$\mathrm{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_+^{S+M} : \mathbf{x}\, può\; produrre\; \mathbf{y}\}$$

  descrive l'insieme di tutte le combinazioni $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tecnicamente possibili data la tecnologia adottata

Proprietà dell'insieme delle possibilità produttive (1/5)

- Tra le principali proprietà che possono essere attribuite a $\mathbf{Z}$ – in altri termini le assunzioni più comuni su $\mathbf{Z}$ – troviamo:
  1. Chiusura
  2. Produttività
  3. Essenzialità debole o Inesistenza della «Terra della Cuccagna»
  4. Free disposal degli input (possibilità di distruzione gratuita degli input)
  5. Free disposal degli output (possibilità di distruzione gratuita degli output)
  6. Convessità
  7. Scarsità
  8. Irreversibilità del processo produttivo

Proprietà dell'insieme delle possibilità produttive (2/5)

1. Chiusura
   - $\mathbf{Z}$ è un insieme chiuso, ossia contiene tutti i punti della sua frontiera ed è costituito da un numero finito di processi
2. Produttività
   - $\mathbf{Z}$ è un insieme non vuoto, ossia esiste almeno un processo che impiega qualche input e dia luogo ad almeno un output positivo
3. Essenzialità debole o Inesistenza della «Terra della Cuccagna»
   - La produzione di un output positivo richiede sempre l'impiego di qualche input, in altre parole l'inattività è possibile ma per realizzare quantità positive di output bisogna utilizzare quantità positive di input (non si può produrre qualcosa dal nulla). In altri termini,

$$(\mathbf{x}, 0_S) \in \mathrm{Z} \text{ ma se } \mathbf{y} \geq 0 \; (0_M, \mathbf{y}) \notin \mathrm{Z}$$

<u>Tali proprietà specificano la condizione di *regolarità* della tecnologia</u>

Proprietà dell'insieme delle possibilità produttive (3/5)

4. *Free disposal* degli input (possibilità di distruzione gratuita degli input)
   - Garantisce la possibilità di un aumento degli input. Se un processo produttivo è possibile, allora lo sono anche tutti quei processi che impiegano quantità superiori di input per ottenere quantità non superiori di output

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{Z},\ \mathbf{x}' \geq \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{x}',\mathbf{y}) \in \mathrm{Z}$$

In relazione ad una combinazione di input $\mathbf{x}$ che consente di produrre un vettore di output $\mathbf{y}$, è sempre possibile individuare una combinazione di input $\mathbf{x}'$ in cui ciascuna componente rappresenta una quantità di input superiore o al limite uguale alla componente corrispondente nel vettore $\mathbf{x}$ attraverso la quale produrre la medesima quantità di output $\mathbf{y}$

5. *Free disposal* degli output (possibilità di distruzione gratuita degli output)
   - Garantisce la possibilità di diminuzione di output. Se un processo produttivo è possibile, allora lo sono anche tutti quei processi che impiegando la medesima quantità di input consentono di ottenere quantità inferiori output

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathrm{Z},\ \mathbf{y}' \leq \mathbf{y} \Rightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y}') \in \mathrm{Z}$$

Tali proprietà specificano la condizione di *monotonicità* della tecnologia

Proprietà dell’insieme delle possibilità produttive (4/5)

6. Convessità
   - Se sono realizzabili in modo indipendente diversi piani produttivi, ne sarà realizzabile anche la media ponderata. In altre parole, quando due o più combinazioni di input-output sono possibili ogni media ponderata di due vettori di input può produrre la stessa media ponderata dei due vettori di output corrispondenti
7. Scarsità
   - Per ogni $\mathbf{x}$ finito $\mathbf{Z}$ è limitato superiormente; ciò garantisce che una quantità finita di input non produca quantità infinite di output
8. Irreversibilità del processo produttivo
   - È impossibile trasformare un vettore di output nel vettore di input usato per produrlo; in termini formali

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathrm{Z}, \text{ e } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \notin \mathrm{Z}$$

Proprietà dell'insieme delle possibilità produttive (5/5)

- $\mathbf{Z}$ è una generalizzazione della funzione di produzione
  - Nel caso di un processo produttivo mono-prodotto è possibile derivare una funzione di produzione da $\mathbf{Z}$ risolvendo un problema di massimizzazione
- La funzione di produzione rappresenta il confine superiore di $\mathbf{Z}$ e l'insieme di combinazioni di input e output tecnicamente efficienti
- A partire da un insieme di produzione, nel quale i processi sono espressi nella forma $(\mathbf{x}, y)$, una frontiera di produzione è una funzione

$$f(\mathbf{x}) = \max\{y: (\mathbf{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{Z}\}$$

Rappresentazioni ristrette

- Nelle analisi empiriche, per ragioni di convenienza, spesso si ricorre ad una rappresentazione «ristretta» dell'insieme delle possibilità produttive
- Due alternative:
    1. Insieme del fabbisogno di input relativo al vettore $\mathbf{y}$ (*input requirement set)*
    2. Insieme degli output producibili a partire dal vettore di input $\mathbf{x}$ (*producible output set*)

Input requirement set (1/2)

- L'insieme del fabbisogno di input relativo al vettore $\mathbf{y}$ è costituito da tutti i vettori $\mathbf{x}$ di input che consentono di produrre il vettore $\mathbf{y}$ di output
- In termini formali si ha

$$L(\mathbf{y}) = \left\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}_{+}^{\boldsymbol{S}}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathrm{Z}\right\}$$

- Alle proprietà 1-7 di $\mathbf{Z}$, corrispondono analoghe (più deboli) proprietà di $L(\mathbf{y})$
  1. Chiusura — $L(\mathbf{y})$ è un insieme chiuso
  2. Essenzialità debole — $\mathbf{0}_S \in L(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{y=0}$
  3. Free disposal degli input — $\mathbf{x} \in L(\mathbf{y}), \mathbf{x}' \geq \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{x}',\mathbf{y}) \in L(\mathbf{y})$
  4. Free disposal degli output — $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y} \Rightarrow L(\mathbf{y}) \subseteq L(\mathbf{y}')$
  5. Convessità — $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in L(\mathbf{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}') \in L(\mathbf{y})\ \forall \boldsymbol{\lambda} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$
  6. Scarsità — $\mathbf{x} \notin L(\mathbf{y})$ se $\mathbf{y}$ è infinito

Input requirement set (2/2)

- Il confine inferiore dell'insieme del fabbisogno di input relativo al vettore $\mathbf{y}$ di output è costituito dall' «isoquanto»
- In termini formali si ha

$$Isoq\ L(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in L(\mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} \notin L(\mathbf{y}), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})\}$$

$Isoq\ L(\mathbf{y})$ descrive l'insieme di vettori di input capaci di produrre $\mathbf{y}$ le combinazioni di input che producono un dato output $\mathbf{y}$ ma che, quando contratti radialmente, diventano incapaci di produrlo

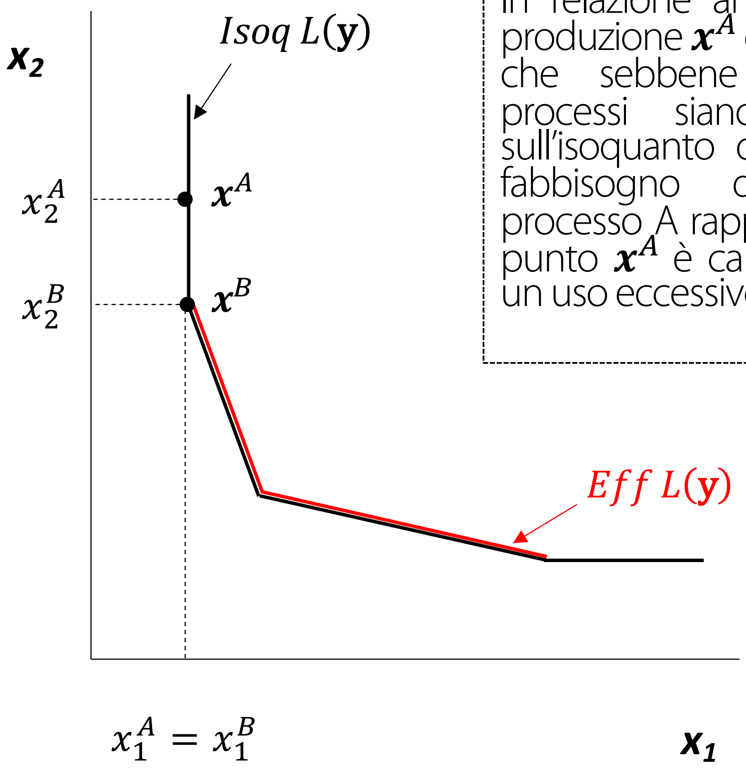
- Un ulteriore sottoinsieme dell'insieme del fabbisogno di input relativo al vettore $\mathbf{y}$ di output è costituito dal cosiddetto «sottoinsieme efficiente»

$$Eff\ L(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}|\mathbf{x} \in L(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}' \leq \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x}' \notin L(\mathbf{y})\}$$

N.B. $Eff\ L(\mathbf{y})$ è incluso nell'isoquanto

Rappresentazione grafica

Il grafico mostra sia l'isoquanto che il sottoinsieme efficiente del fabbisogno di input nel caso semplificato di un processo produttivo con due input e un output



In relazione ai due piani di produzione $\boldsymbol{x}^A$ e $\boldsymbol{x}^B$ si osserva che sebbene entrambi i processi siano posizionati sull'isoquanto dell'insieme di fabbisogno di input, il processo A rappresentato dal punto $\boldsymbol{x}^A$ è caratterizzato da un uso eccessivo dell'input x_2

Producible output set (1/2)

- L'insieme degli output producibili a partire dal vettore di input $\mathbf{x}$ è costituito da tutti i vettori $\mathbf{y}$ di output producibili a partire dal vettore di input $\mathbf{x}$
- In termini formali si ha

$$P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}_{+}^{\boldsymbol{M}}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathrm{Z}\}$$

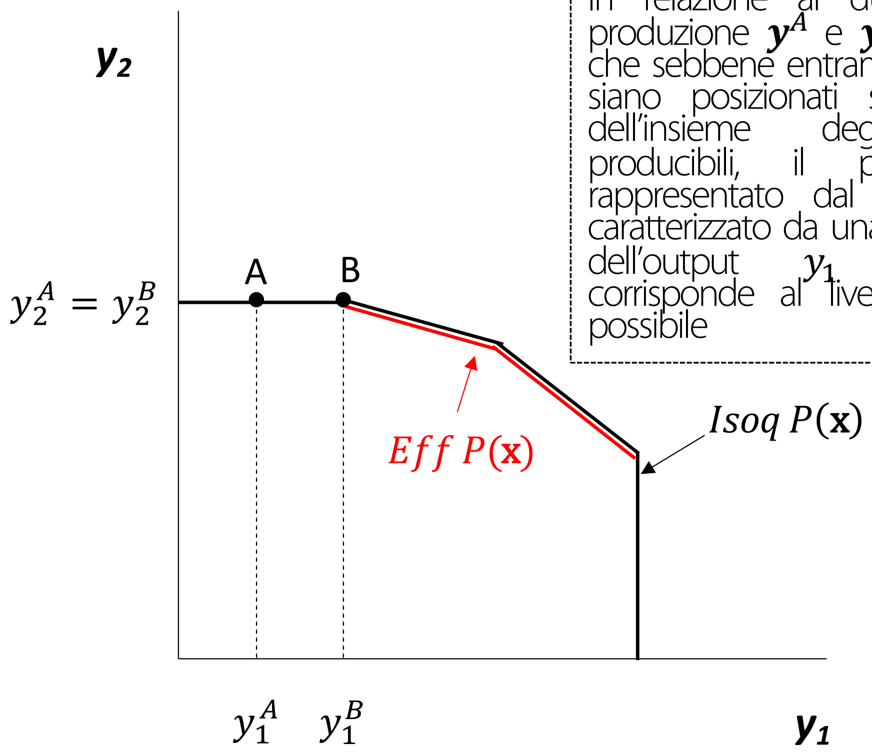
- Alle proprietà 1-7 di $\mathbf{Z}$, corrispondono analoghe (più deboli) proprietà di $P(\mathbf{x})$
    1. Chiusura $\qquad P(\mathbf{x})$ è un insieme chiuso
    2. Essenzialità debole $\qquad P(0_S) = \{0_M\}$
    3. Free disposal degli input $\qquad P(\mathbf{x}') \supseteq P(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$
    4. Free disposal degli output $\qquad \mathbf{y} \in P(\mathbf{x}) \Longrightarrow \mathbf{y}' \in P(\mathbf{x})$ per $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$
    5. Convessità $\qquad \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in P(\mathbf{x}) \Longrightarrow (\theta \boldsymbol{y} + (1-\theta)\mathbf{y}') \in P(\mathbf{x}) \; \forall \theta [0,1]$
    6. Scarsità $\qquad P(\mathbf{x})$ è limitato per $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}_{+}^{\boldsymbol{S}}$

Producible output set (2/2)

- Il confine superiore dell'insieme degli output producibili a partire dal vettore di input $\mathbf{x}$ è costituito dall'isoquanto dell'insieme degli output producibili o «curva di trasformazione»
- In termini formali si ha
$$Isoq\ P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}|\mathbf{y} \in P(\mathbf{x}), \boldsymbol{\delta}\mathbf{y} \notin P(\mathbf{x}), \forall \boldsymbol{\delta}[\mathbf{0}, \infty)\}$$
  In altre parole, la curva di trasformazione descrive l'insieme di tutte le combinazioni di output che si possono ottenere da un dato vettore $\mathbf{x}$ ma che, quando aumentate radialmente, non possono più essere prodotte a partire dal vettore assegnato di input
- Un ulteriore sottoinsieme dell'insieme degli output producibili dato il vettore $\mathbf{x}$ di input è costituito dal cosiddetto «sottoinsieme efficiente»
$$Eff\ P(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}|\mathbf{y} \in P(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y}' \geq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}' \notin P(\mathbf{x})\}$$

Rappresentazione grafica

Il grafico mostra sia l'isoquanto che il sottoinsieme efficiente dell'insieme degli output producibili nel caso semplificato di un processo produttivo con un input e due output



In relazione ai due piani di produzione $\boldsymbol{y}^A$ e $\boldsymbol{y}^B$ si osserva che sebbene entrambi i processi siano posizionati sull'isoquanto dell'insieme degli output producibili, il processo A rappresentato dal punto $\boldsymbol{y}^A$ è caratterizzato da una produzione dell'output y_1 che non corrisponde al livello massimo possibile

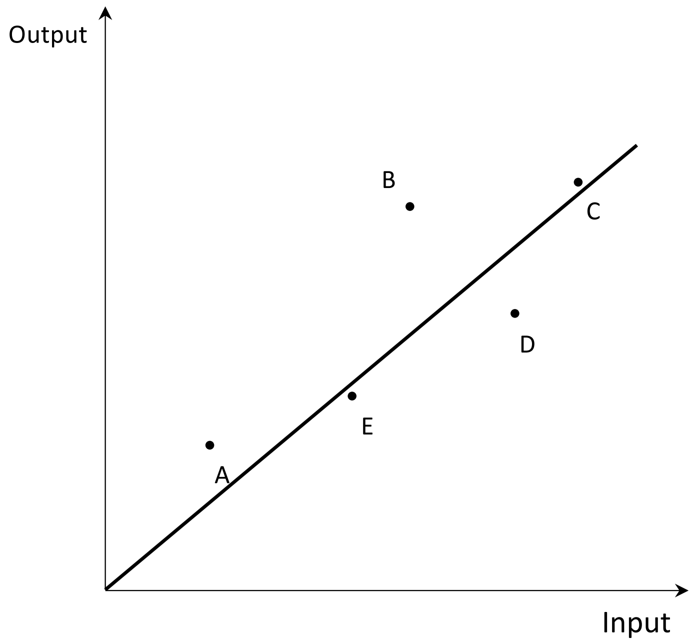
Approcci alla misurazione dell’efficienza tecnica

Premessa

- Nelle analisi empiriche, il primo problema che si pone è individuare uno stimatore della tecnologia di produzione partendo dai dati osservati (quantità degli output prodotti e degli input impiegati)
- I principali approcci alla misurazione dell'efficienza si dividono in:
  1. Approccio tradizionale
  2. Approccio di frontiera
- A prescindere da quale sia l'approccio adottato, le misure di efficienza che si ottengono al termine di un'analisi empirica rappresentano misure **relative**
  - Ciascuna unità decisionale è valutata in riferimento alle migliori performance manifestate dall'insieme delle unità decisionali prese in esame (le quali presentano tutte caratteristiche simili)
  - Se le performance del gruppo di riferimento cambiano, conseguentemente si modificano anche le misure di efficienza

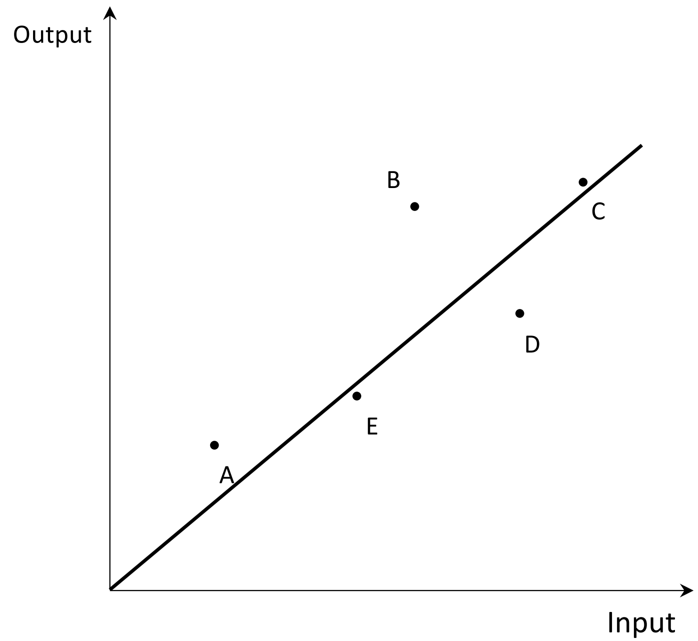
Approccio tradizionale (1/3)

- Disponendo dei dati sulle quantità di input impiegate e sui livelli di output ottenuti da un insieme di unità produttive, la costruzione della funzione di produzione viene realizzata ricorrendo al **modello classico di regressione**
- La funzione di produzione stimata dai dati cross-section mediante gli OLS è una retta media interpolante la nuvola di osservazioni riguardanti le unità produttive (una sorta di funzione media per l'industria)



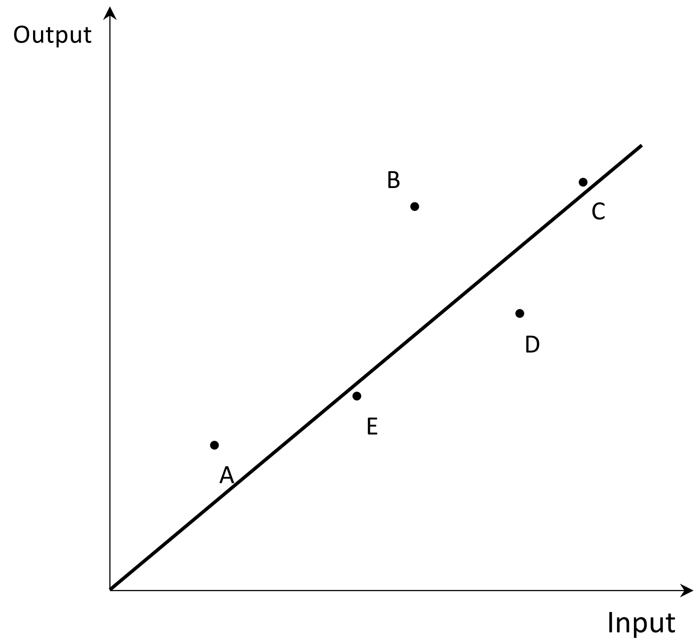
Approccio tradizionale (2/3)

- Il grado di efficienza scaturiva dal confronto della performance dell'unità decisionale osservata con le prestazioni medie del campione di osservazioni. Venivano considerate:
  - EFFICIENTI – le unità posizionate al di sopra della retta di regressione
  - INEFFICIENTI – le unità posizionate al di sotto della retta di regressione
- Tuttavia in questi casi è più corretto dire che:
  - Le unità collocate al di sopra della retta di regressione sono in grado di produrre più della media
  - Le unità collocate al di sotto della retta di regressione hanno prodotto meno della media



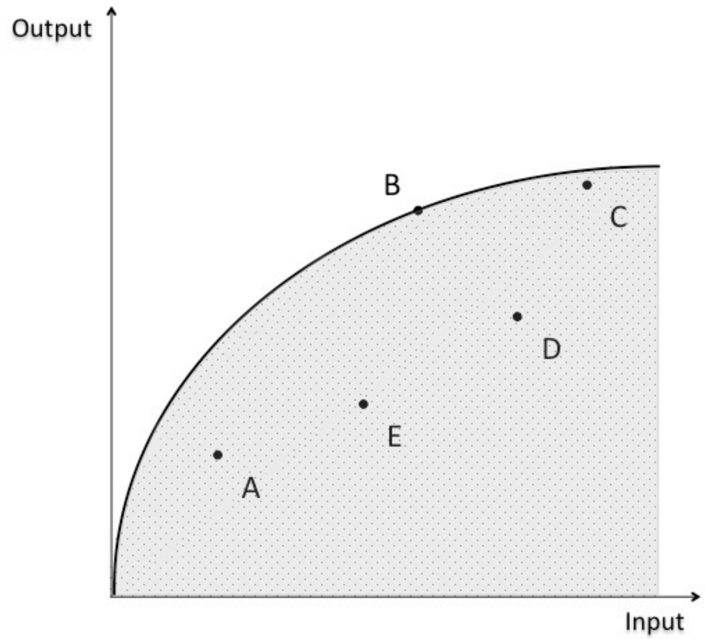
Approccio tradizionale (3/3)

- Il principale punto di debolezza di questo approccio è il seguente: **il fatto che alcune delle osservazioni siano al di sopra della funzione stimata contraddice la definizione di funzione di produzione**
- In altri termini, la funzione così stimata non corrisponde al confine dell'insieme di produzione
- Il fatto che alcuni punti siano collocati al di sopra della funzione dimostra che questa non esprime il più elevato livello di output producibile per ogni dato livello di input
- Di conseguenza, **l'approccio tradizionale non consente di valutare il grado di aderenza del processo produttivo osservato a uno standard di ottimalità**



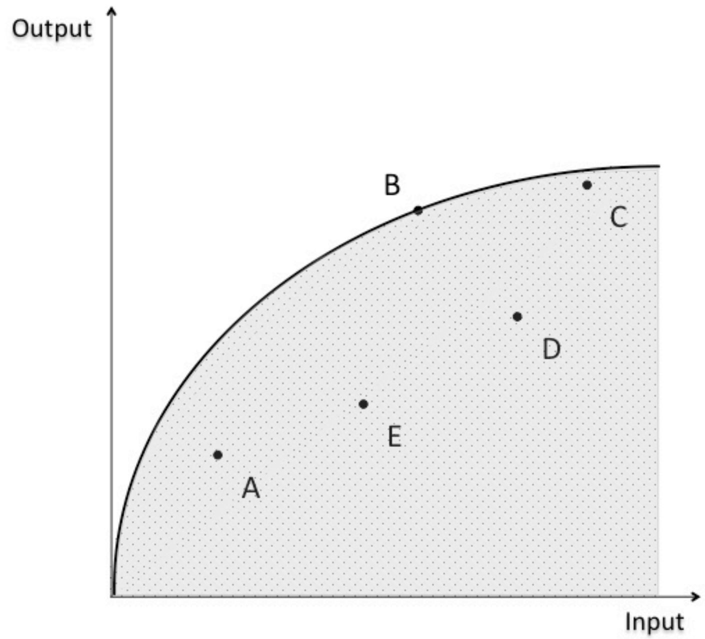
Approccio di frontiera (1/2)

- Disponendo dei dati sulle quantità di input impiegate e sui livelli di output ottenuti da un insieme di unità produttive, si perviene alla costruzione di una frontiera delle possibilità produttive che «circonda» i punti che rappresentano le unità osservate
- Il carattere distintivo dell'analisi di frontiera è che i dati piuttosto che essere intersecati da una funzione, ne sono circondati o inviluppati

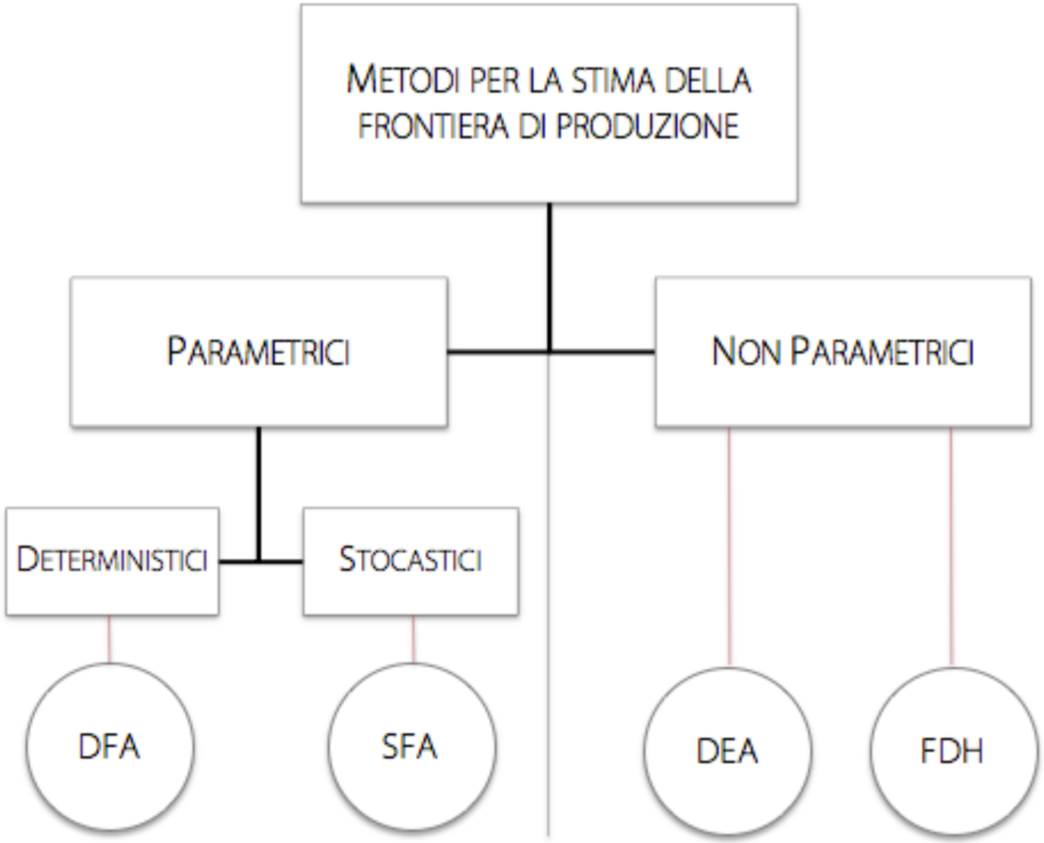


Approccio di frontiera (2/2)

- Il grado di efficienza scaturisce dal confronto della performance dell'impresa osservata con dei riferimenti che sono sulla frontiera (*best practice*). Vengono considerate:
  - EFFICIENTI – le unità posizionate sulla frontiera
  - INEFFICIENTI – le unità posizionate al di sotto della frontiera
- La misura dell'efficienza viene calcolata in termini di distanza dalla frontiera
- L'approccio di frontiera è quello attualmente più utilizzato nelle misurazioni empiriche dell'efficienza



Metodi per la stima della frontiera



Metodi parametrici

- La frontiera è espressa ricorrendo ad una funzione matematica nota che dipende da un numero fisso di parametri sconosciuti, oggetto di stima (Maietta, 2007)
  - Dato un campione di n unità decisionali che producono un output y (o anche più output omogenei preliminarmente aggregati in una misura sintetica) impiegando m input, si stimano i parametri di funzione matematica nota (es. Cobb-Douglas)
  - La misura dell'efficienza tecnica è ricavata dai residui della regressione
- Tra i metodi parametrici si annoverano:
  1. Frontiere deterministiche (DFA = Deterministic Frontier Analysis)
  2. Frontiere stocastiche (SFA = Stochastic Frontier Analysis)

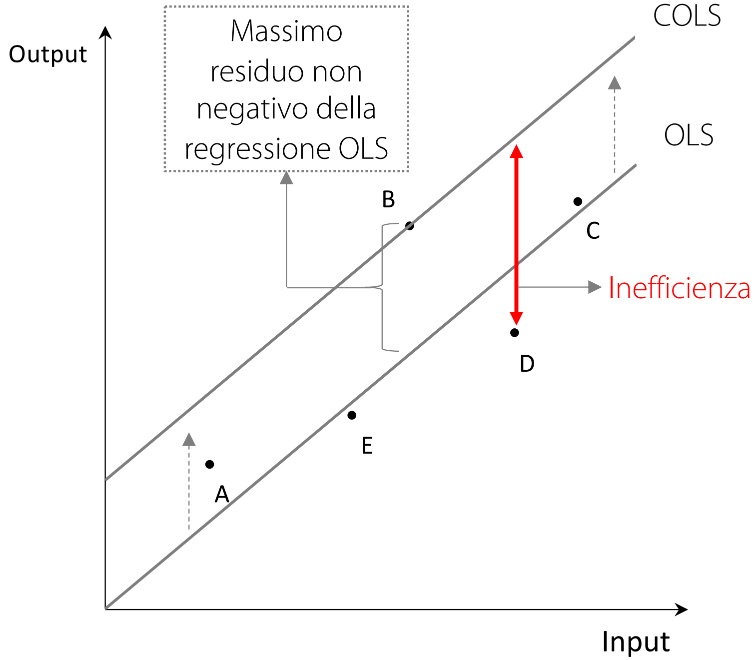
- Il postulato alla base di tutti gli approcci parametrici è la possibilità di individuare, a partire dal set di dati osservati, la frontiera con una funzione (che circondi quanto più da vicino i dati) del tipo

$$y = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon$$

Dove: y è l'output prodotto, $\boldsymbol{x}$ è il vettore degli input utilizzati, $\boldsymbol{\beta}$ è il vettore dei parametri, il residuo $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta il termine di errore

Frontiere deterministiche

- Il primo modello di frontiera deterministica matematica è stato proposto da Aigner e Chu (1968)
- Per stimare l'inefficienza tecnica con una frontiera deterministica occorre:
  1. Specificare una funzione di produzione
     $$y = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}) - u$$
  2. Stimare la frontiera con il metodo dei Minimi Quadrati Ordinari (OLS – Ordinary Least Squares)
  3. Calcolare il valore massimo tra gli scarti e traslare verso l'alto la linea di interpolazione OLS di una misura pari al massimo residuo (il metodo è noto in letteratura come COLS – Corrected Ordinary Least Squares)
- Poiché nelle frontiere deterministiche non si avanza alcuna ipotesi sul meccanismo di generazione delle osservazioni e si assume assenza di errore stocastico, **la differenza tra produzione teorica ed osservata rappresenta solamente l'inefficienza dell'unità produttiva**



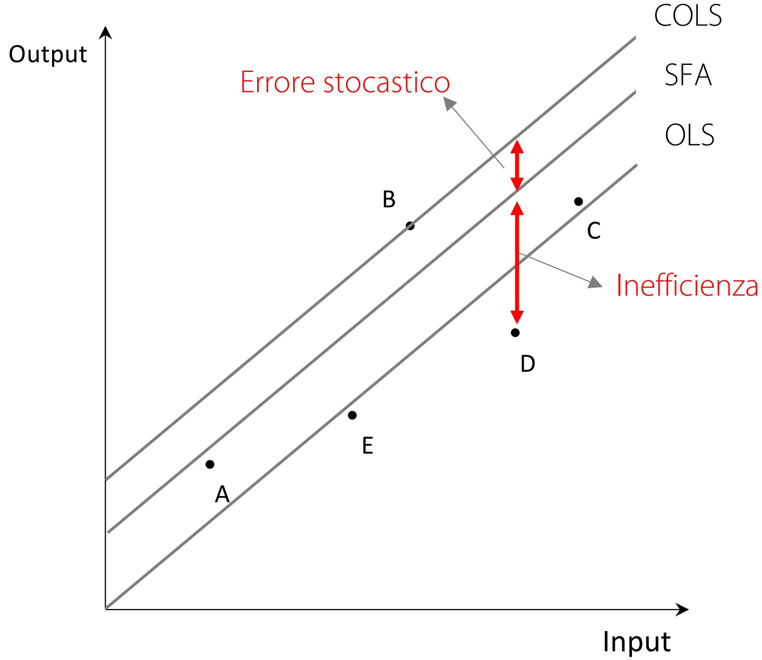
Frontiere stocastiche

- Il modello di frontiera stocastica è stato introdotto contemporaneamente ed indipendentemente da Aigner, Lovell e Schmidt (1977) e Meeusen e Van den Broeck (1977)
- Il modello base può essere scritto come di seguito

$$y = f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}) + v - u$$

dove il termine $\boldsymbol{v}$ è una variabile casuale con distribuzione simmetrica e cattura gli effetti casuali di errori di misurazione e di shock esogeni (errore stocastico), il termine $\boldsymbol{u}$ è una variabile casuale che cattura possibili inefficienze tecniche nella produzione

Nelle frontiere stocastiche, **la differenza tra produzione teorica ed osservata è scissa in due componenti, errore stocastico e misura dell'inefficienza dell'unità produttiva**



Metodi non parametrici

- L'insieme di produzione si ricostruisce partendo dal set di dati osservati di cui la frontiera, costruita imponendo alcune proprietà, costituisce l'inviluppo
  - La misura dell'efficienza tecnica è espressa dalla distanza dalla frontiera
- Tra i metodi non parametrici si annoverano:
  1. Data envelopment analysis (DEA)
     - Modello a rendimenti di scala costanti sviluppato da Charnes, Cooper e Rhodes (1978)
     - Modello a rendimenti di scala variabili sviluppato da Banker, Charnes e Cooper (1984)
  2. Free Disposal Hull (FDH)
     - Deprins, D., Simar, L., e Tulkens, H. (1984)

Data Envelopment Analysis

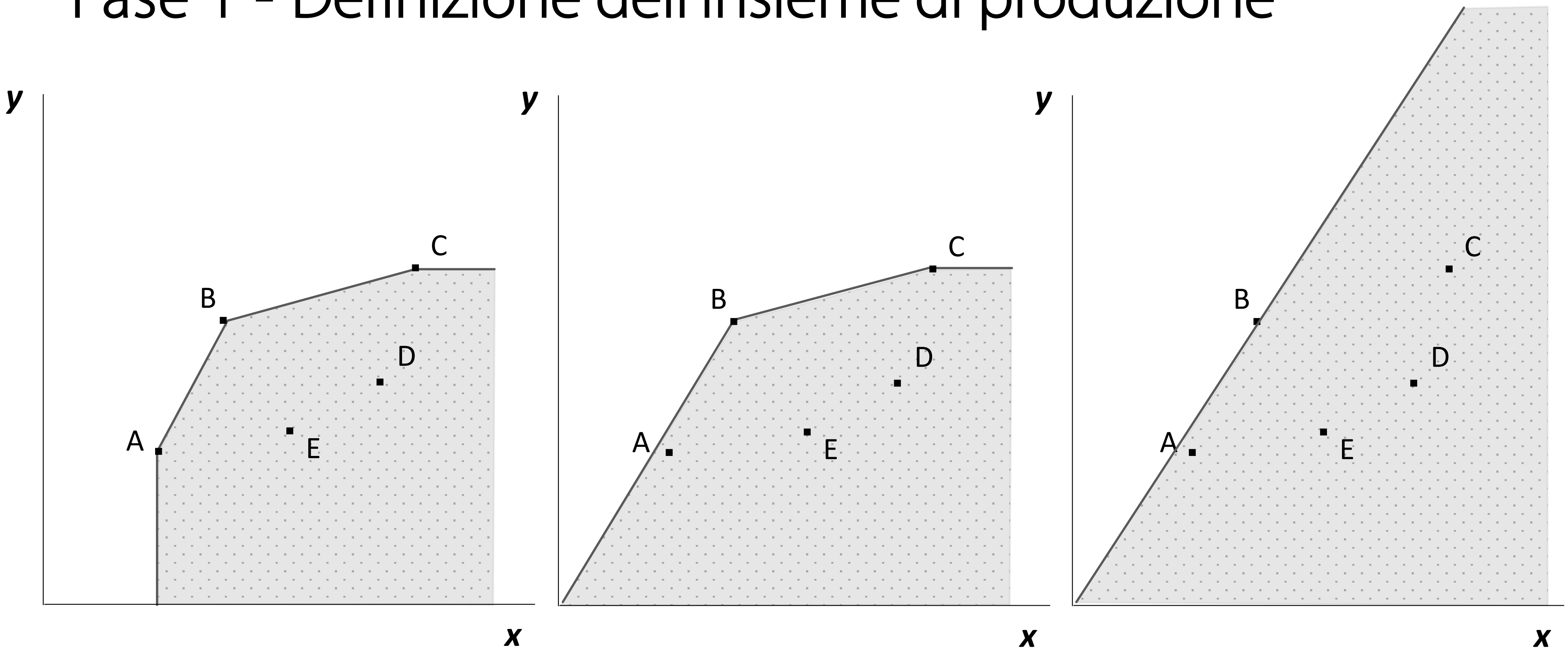
Premessa

- Metodo non parametrico per la stima della frontiera di produzione proposto da Charnes, Cooper e Rhodes (1978) nella formulazione a redimenti costanti di scala, e Banker, Charnes e Cooper (1984) nella formulazione a rendimenti di scala variabili
- Attualmente è uno tra i metodi più utilizzati nelle misurazioni empiriche dell'efficienza dei processi multi-input e/o multi-output
- Consente di stimare la frontiera di produzione come inviluppo lineare dei dati input-output relativi alle singole imprese nel settore economico considerato (Rapacciuolo, 2004). In altri termini…
    - Utilizzando i metodi di programmazione lineare, partendo dai dati sugli input impiegati e sugli output ottenuti da un insieme di unità produttive omogenee (cd. DMU), **consente di costruire una frontiera non parametrica lineare a tratti (cd. *best practice frontier*) rispetto alla quale vengono calcolate le misure di efficienza secondo il principio della massima contrazione/espansione radiale delle variabili e di valutare l'inefficienza relativa delle DMU in termini distanza radiale dalla frontiera efficiente**
- NB: la DEA si basa sulla misura dell'efficienza di Debreu-Farrell, ma consente di rispettare la definizione di efficienza di Koopmans

Fasi della misurazione

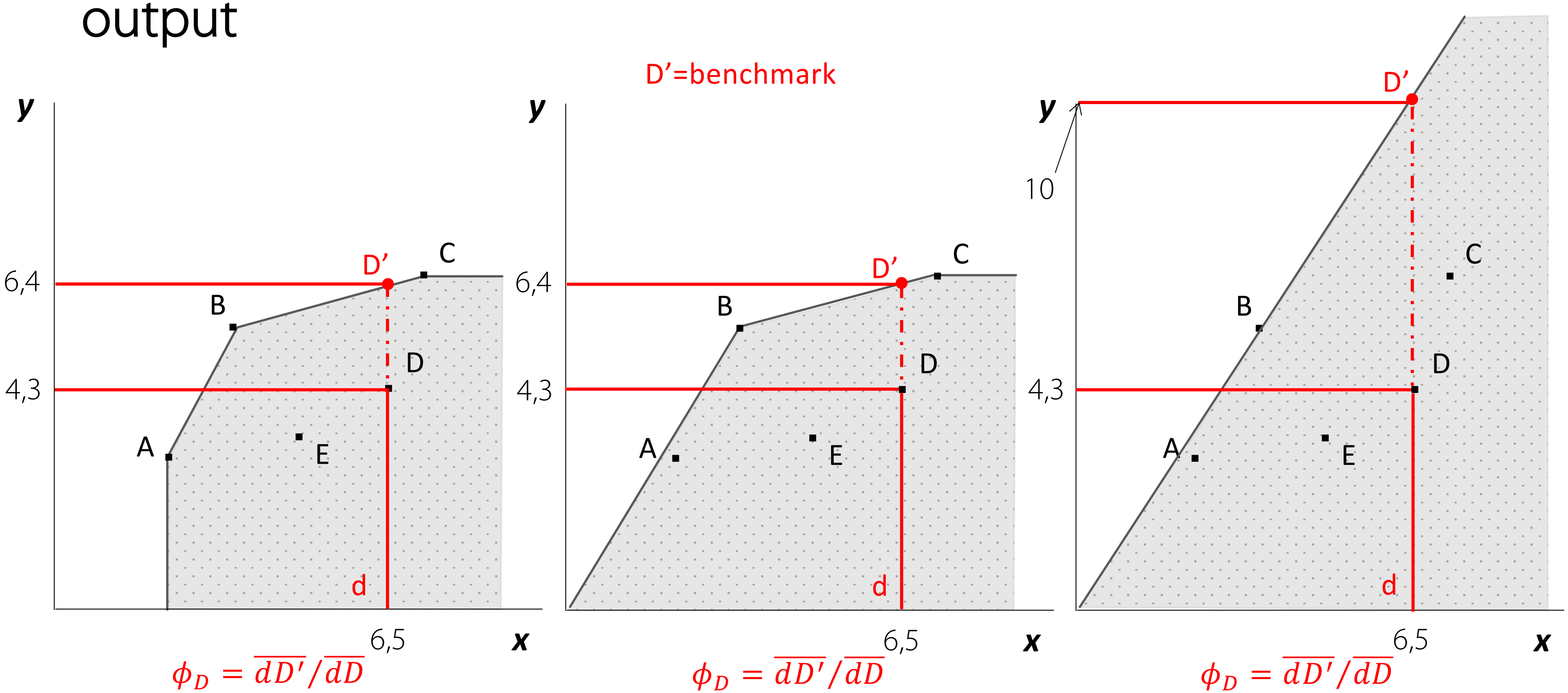
- La misurazione dell'efficienza di una DMU attraverso la DEA prevede due step:
  1. Definizione dell'insieme di produzione
  2. Stima del punteggio di efficienza
     - Il punteggio di efficienza prodotto dalla DEA è la misura dell'efficienza tecnica di Debreu-Farrell (esprime quindi la massima espansione radiale dei livelli di output o la massima contrazione radiale dei livelli di input della DMU)
     - La DEA consente di rispettare la definizione di efficienza di Koopmans in quanto restituisce anche i valori di *slack*

Fase 1 - Definizione dell'insieme di produzione



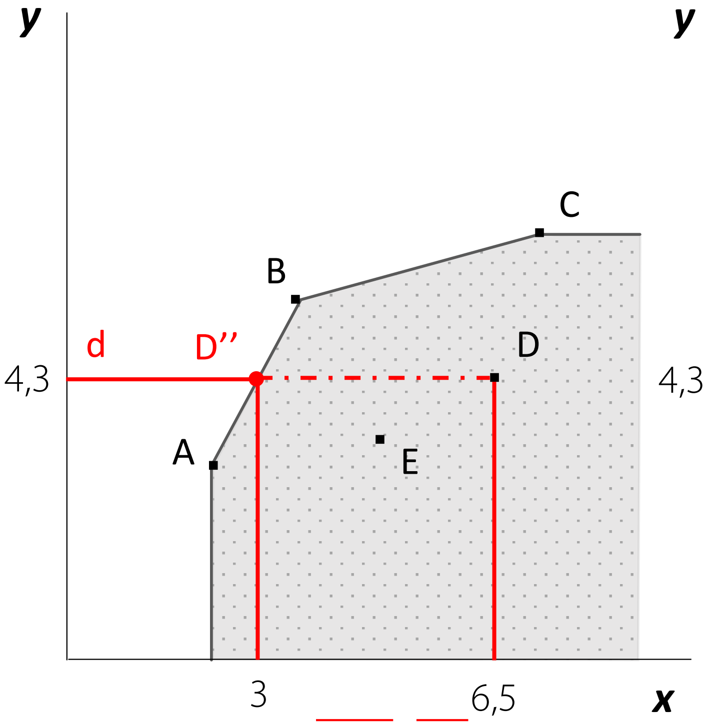
Fase 2 - Stima della massima espansione radiale dei livelli di output

D'=benchmark

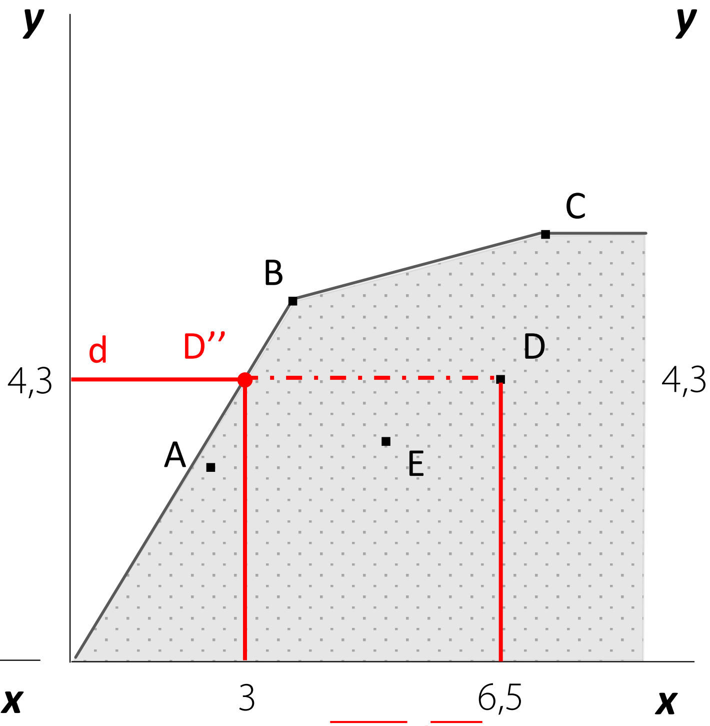


Fase 2 - Stima della massima contrazione radiale dei livelli di input

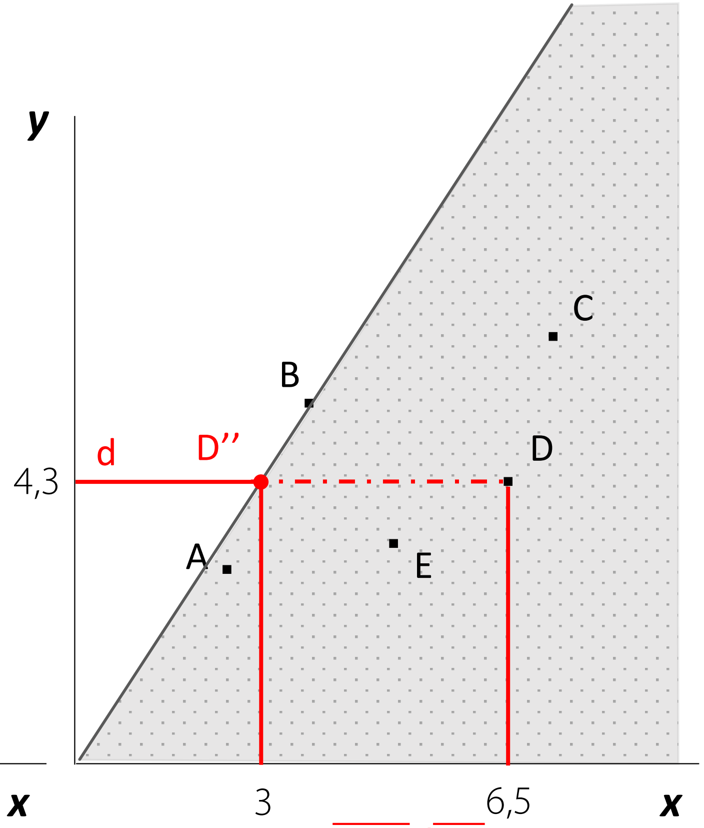
D''=benchmark



$\theta_D = \overline{dD''}/\overline{dD}$



$\theta_D = \overline{dD''}/\overline{dD}$



$\theta_D = \overline{dD''}/\overline{dD}$

Partiamo da un esempio

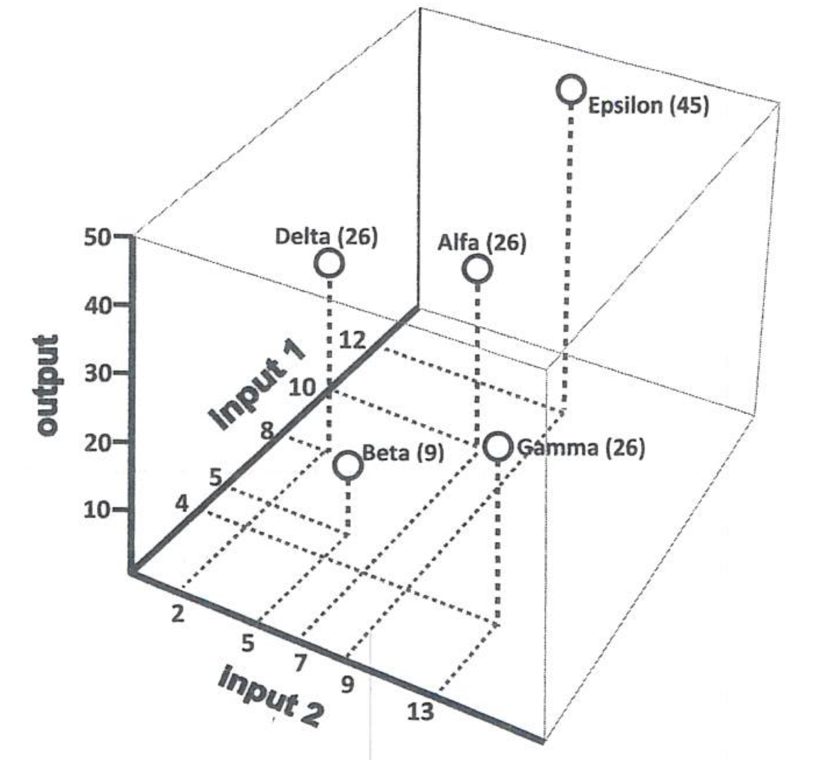
- α , β , γ , δ , ε sono 5 unità decisionali (omogenee)
- Possiamo descrivere il processo produttivo che ciascuna di esse ha realizzato – supponiamo si tratti di una tecnologia con due input ed un solo output, perché per una rappresentazione grafica siamo vincolati ad un massimo di tre dimensioni – con una coppia di vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, composti rispettivamente da $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{p}$ elementi, che possono poi essere riuniti in un solo vettore $\boldsymbol{z}$
- Immaginiamo che i cinque processi produttivi siano descritti dai seguenti vettori (l'output è il terzo elemento di ciascun vettore):
  - $z_\alpha = (10; 7; 26)$
  - $z_\beta = (5; 5; 9)$
  - $z_\gamma = (4; 13; 26)$
  - $z_\delta = (8; 2; 26)$
  - $z_\varepsilon = (12; 9; 45)$

Rappresentazione grafica

Nel grafico si mostra un sottoinsieme $\mathbb{R}_3^+$ (per una rappresentazione grafica siamo vincolati ad un massimo di tre dimensioni) all'interno del quale costruire l'insieme Z – relativo ad una tecnologia con due input ed un solo output – a partire da cinque processi produttivi effettivamente realizzati: Alfa, Beta, Gamma, Delta, Epsilon

Immaginiamo che i cinque processi produttivi siano descritti dai seguenti vettori (l'output è il terzo elemento di ciascun vettore):

- $z_\alpha = (10; 7; 26)$
- $z_\beta = (5; 5; 9)$
- $z_\gamma = (4; 13; 26)$
- $z_\delta = (8; 2; 26)$
- $z_\varepsilon = (12; 9; 45)$



Riferimenti bibliografici (1/2)

- Aigner D., Chu S.F., 1968, On estimating the industry production function, «American Economic Review», vol. 58, n. 4, pp. 826-839
- Aigner D., Lovell C.A.K., Schmidt P., 1977, Formulation and estimation of stochastic production function models, «Journal of Econometrics», vol. 6, n. 1, pp. 21-37
- Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., 1984, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, «Management Science», vol. 30, n. 9, pp. 1078-1092
- Biggeri L., Bini M., Coli A., Grassini L., Maltagliati M., 2012, Statistica per le decisioni aziendali, Pearson
- Bracalente B., Cossignani M., Mulas A., 2009, Statistica Aziendale, McGraw-Hill
- Charnes A., Cooper W., Rhodes E.., 1977), Measuringthe efficiency of Decision Making Units, «European Journal of Operation Research», vol. 2, n. 6, pp. 429-444
- Debreu G., 1951, The coefficient of resource utilization, «Econometrica», vol. 19, n. 3, pp. 273-292
- Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H., 1984, Measuring labor-efficiency in post offices, in Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. (a cura di), «The performance of public enterprises: concepts and measurement», North Holland, Amsterdam
- Farrell M.J., 1957, The measurement of productive efficiency of production, «Journal of the Royal Statistical Society», Series A, General, vol. 120, pp. 253-281

Riferimenti bibliografici (2/2)

- Frank R.H., 2010, Microeconomia, McGrow-Hill
- Koopmans T.C., 1951, Analisys of production as an efficient combinations of activities, in Koopmans T.C. (a cura di), «Activity analysis of production and allocation», Wiley, New York.
- Laureti T., 2006, L'efficienza rispetto alla frontiera delle possibilità produttive. Modelli teorici ed analisi empiriche, Firenze University Press
- Maietta O.W., 2008, L'analisi dell'efficienza. Tecniche di base ed estensioni recenti, Edizioni Scientifiche Italiane
- Meeusen W., Van De Broeck J., 1977, Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error, «International Economic Review», vol. 18, n. 2, pp. 435-444
- Nisticò A., Prosperetti L., 1991, Produzione e produttività, in Marbach G., «Statistica economica», Utet, Torino
- Petretto A., 1986, L'approccio econometrico per la misurazione dei risultati delle imprese pubbliche locali, «Politica economica», a. II, n. 2, pp. 203-224
- Rapacciuolo C., 2004, Misure di efficienza tecnica in due settori, CSC Working Paper n. 50
- Thanassoulis E., 2001, Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software, Kluwer Academic Publishers
- Thiry B., Tulkens, H., 1988, Allowing for technical inefficiency in parametric estimates of production functions with an application to urban transit firms (No. 1988041). Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE).
- Varian H. R., 2007, Microeconomia, settima edizione, Cafoscarina