Misurazione e valutazione delle *performance*

Lezione 4

DEA: Introduzione e Modello CRS

Marialisa Mazzocchitti

Università degli Studi «G. d'Annunzio» di Chieti-Pescara

Agenda

1. Partiamo da un esempio
2. Modello DEA-CRS
3. Realizzare analisi DEA con R

Partiamo da un esempio

Dati

- α , β , γ , δ , ε sono 5 unità decisionali (omogenee)
- Possiamo descrivere il processo produttivo che ciascuna di esse ha realizzato – supponiamo si tratti di una tecnologia con due input ed un solo output, perché per una rappresentazione grafica siamo vincolati ad un massimo di tre dimensioni – con una coppia di vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, composti rispettivamente da $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{p}$ elementi, che possono poi essere riuniti in un solo vettore $\boldsymbol{z}$
- Immaginiamo che i cinque processi produttivi siano descritti dai seguenti vettori (l'output è il terzo elemento di ciascun vettore):
  - $z_\alpha = (10; 7; 26)$
  - $z_\beta = (5; 5; 9)$
  - $z_\gamma = (4; 13; 26)$
  - $z_\delta = (8; 2; 26)$
  - $z_\varepsilon = (12; 9; 45)$

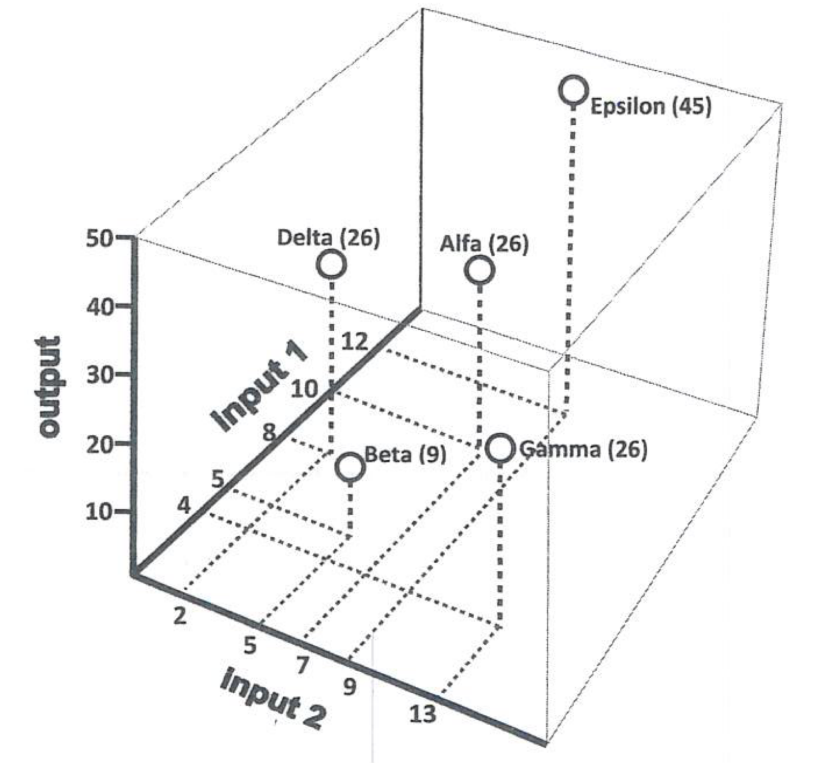
Rappresentazione grafica

Nel grafico si mostra un sottoinsieme $\mathbb{R}_3^+$ (per una rappresentazione grafica siamo vincolati ad un massimo di tre dimensioni) all'interno del quale costruire l'insieme Z – relativo ad una tecnologia con due input ed un solo output – a partire da cinque processi produttivi effettivamente realizzati: Alfa, Beta, Gamma, Delta, Epsilon

Heeks

Immaginiamo che i cinque processi produttivi siano descritti dai seguenti vettori (l'output è il terzo elemento di ciascun vettore):

- $z_\alpha = (10; 7; 26)$
- $z_\beta = (5; 5; 9)$
- $z_\gamma = (4; 13; 26)$
- $z_\delta = (8; 2; 26)$
- $z_\varepsilon = (12; 9; 45)$

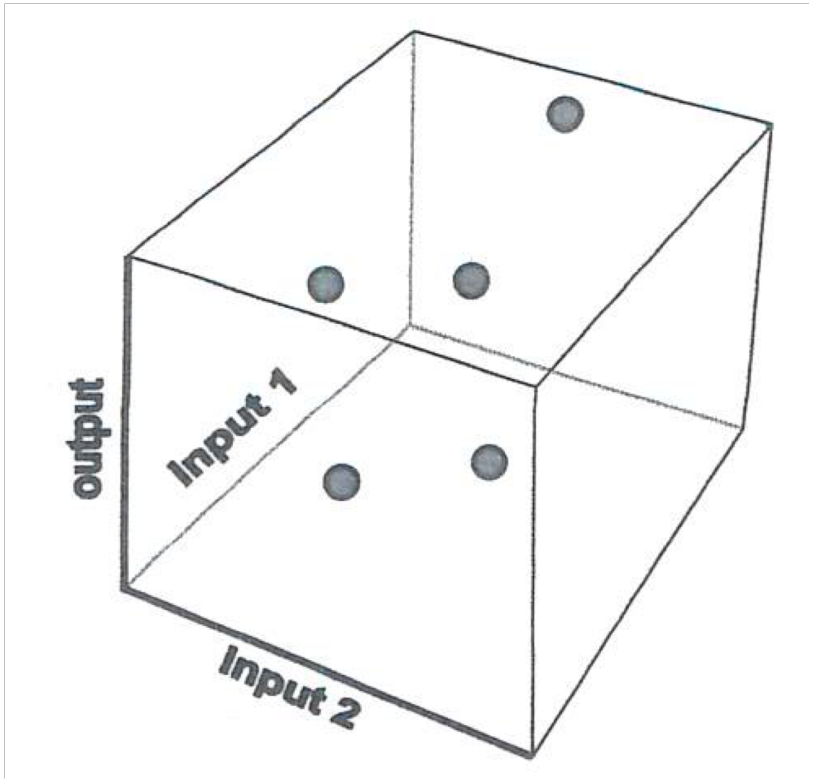


Ricostruire Z

- Sappiamo che la ricerca dei due processi-benchmark, mediante i quali misurare l'input-efficienza e l'output-efficienza di ogni specifica unità decisionale, deve essere condotta all'interno dell'insieme di produzione Z
- Ma come possiamo conoscere Z?
- Ciò che sappiamo, per ora, è soltanto che i 5 processi osservati appartengono a Z. Non sappiamo però quali altri processi produttivi sono realizzabili
- Dovendo, dunque, rinunciare all'idea di poter conoscere con certezza Z, possiamo però stimarlo
- Il processo di costruzione di $\boldsymbol{Z}$ avviene sulla base di ipotesi che, qualora siano considerate plausibili per il settore produttivo considerato, consentono l'ampliamento di $\boldsymbol{Z}$ osservabile (processi produttivi realizzati) fino a una stima di tutto $\boldsymbol{Z}$

Ipotesi 1

I processi produttivi osservati appartengono a Z

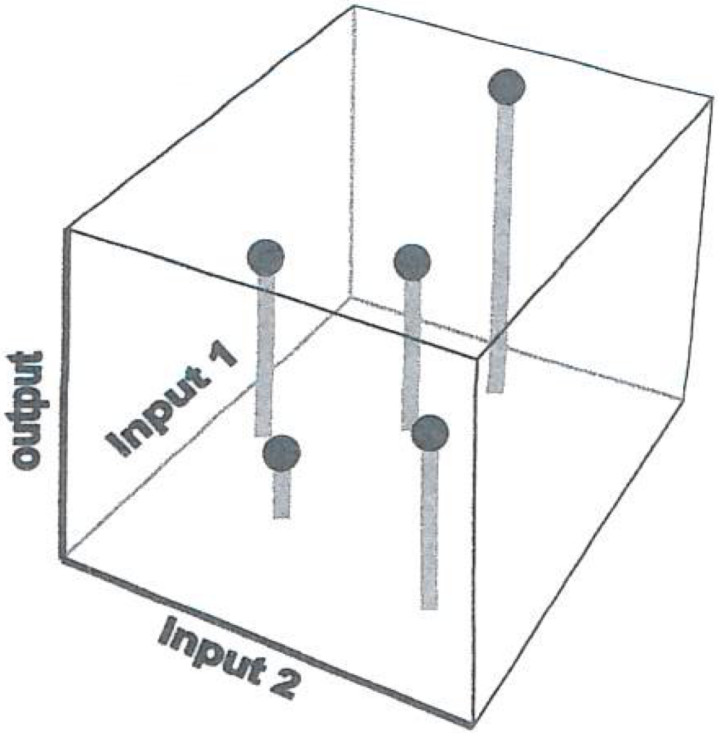


Ipotesi 1+2

Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

Ipotesi 2: Ipotesi di *free disposal* per gli output

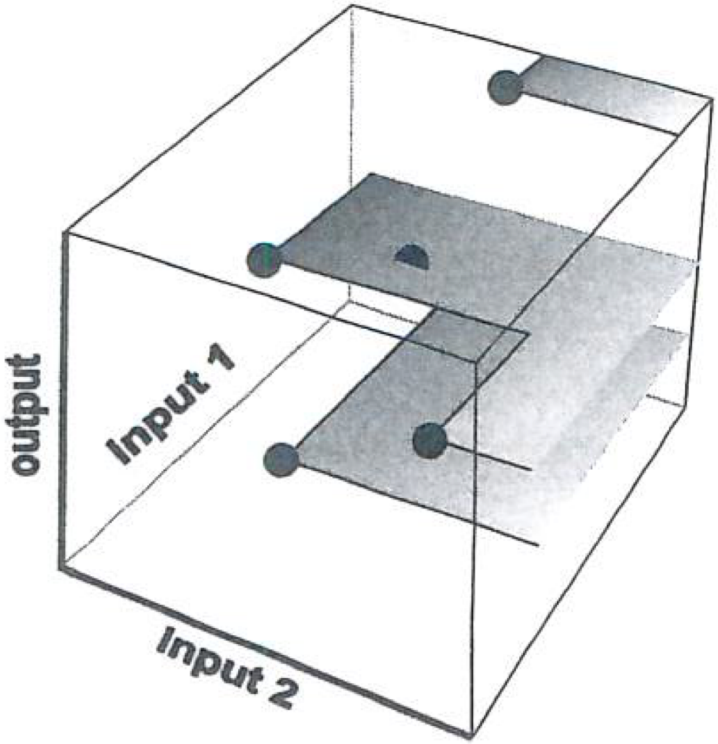


Ipotesi 1+3

Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

Ipotesi 3: Ipotesi di *free disposal* per gli input



Ipotesi 1+2+3

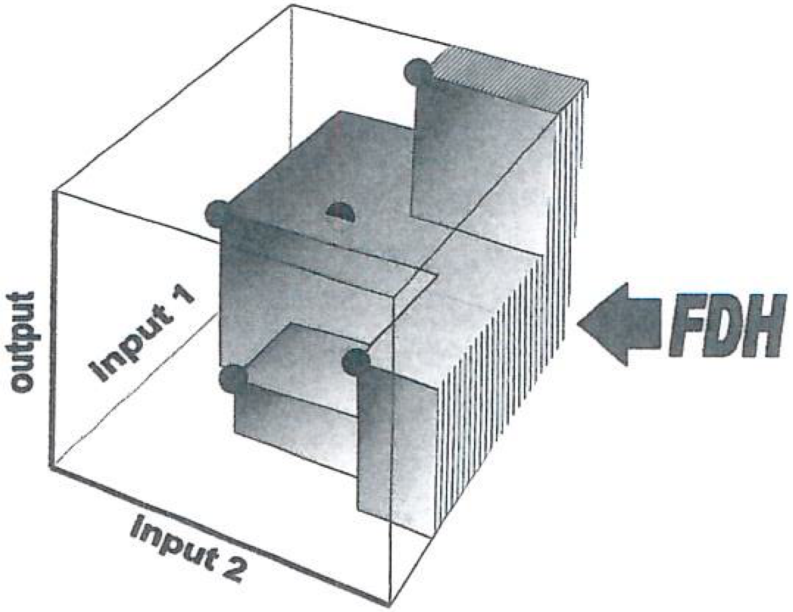
Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

Ipotesi 2: Ipotesi di *free disposal* per gli output

+

Ipotesi 3: Ipotesi di *free disposal* per gli input



Ipotesi 4 (1/3)

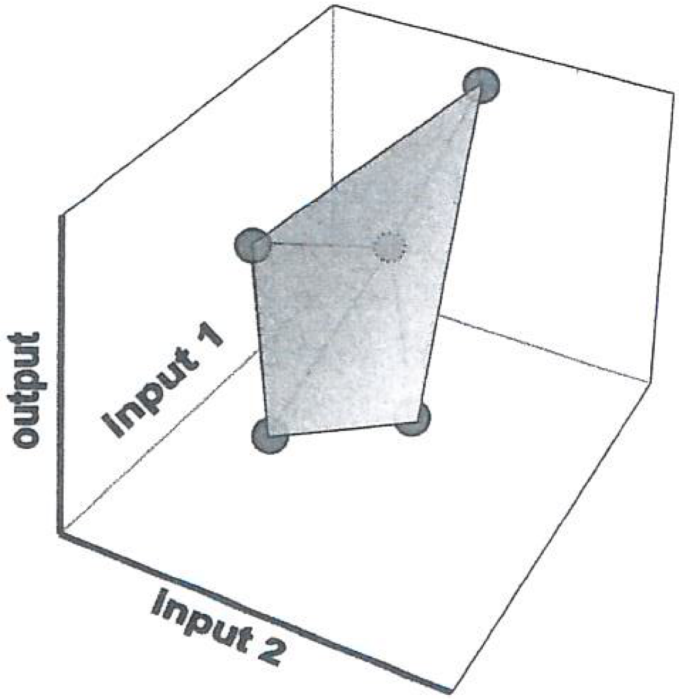
- Convessità (interpolation)
  - Esistono anche le «vie di mezzo»
  - Se i processi produttivi $z_1, z_2, \dots, z_n$ appartengono a Z, allora appartiene a Z anche ciascun processo produttivo ibrido z_π così definito

$$z_\pi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \cdot z_i, \qquad dove \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1 \quad e \quad \varphi_i \geq 0 \quad \forall i$$

  - Ciascun set di scalari φ costituisce una «ricetta» per ottenere un diverso z_π usando gli ingredienti $z_1, z_2, \dots, z_n$
  - Dati gli n vettori di partenza, l'insieme di tutte le loro possibili combinazioni convesse (ottenute con tutti i possibili set di scalari φ con somma pari a 1) costituisce il cosiddetto **inviluppo convesso** dei vettori stessi

Ipotesi 4 (2/3)

Partendo dai nostri cinque processi produttivi $z_\alpha, \ldots, z_\varepsilon$, tutte le possibili loro combinazioni lineari convesse compongono la figura solida (un tetraedro) illustrata qui a fianco



Ipotesi 4 (3/3)

- **Convessità** [continua]
  - Non è un'ipotesi banale, cioè non è accettabile sempre e comunque
  - Presuppone la perfetta divisibilità dei processi produttivi osservati e la successiva componibilità delle frazioni ottenute in un unico processo ibrido
    - Cioè, in base all'ipotesi di convessità, ciascun fattore produttivo deve essere perfettamente divisibile: è un assunto accettabile, per esempio, per l'input energia elettrica (kw/h) molto meno per un macchinario

Ipotesi 1+2+3+4

Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

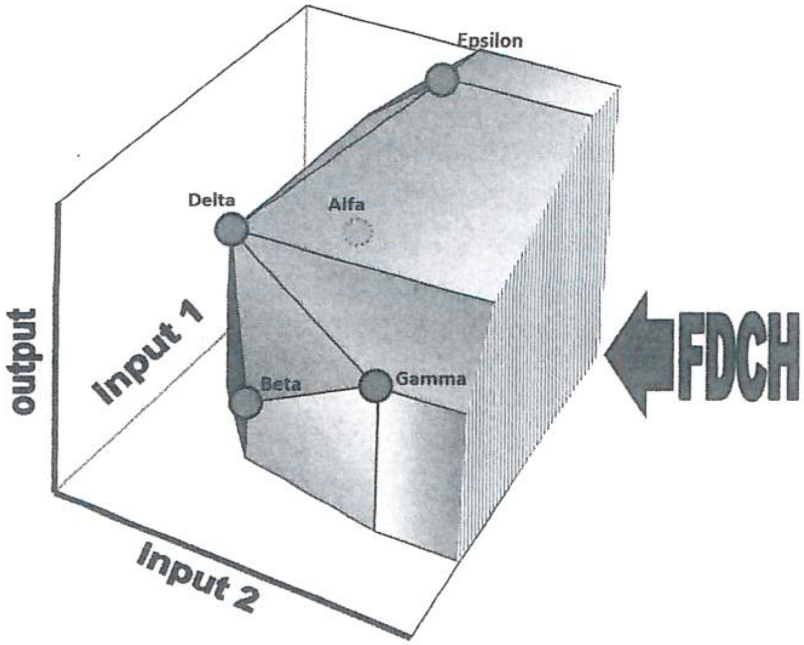
Ipotesi 2: Ipotesi di *free disposal* per gli output

+

Ipotesi 3: Ipotesi di *free disposal* per gli input

+

Ipotesi 4: Convessità



Ipotesi 5

- Possibilità di inazione (*no free lunch assumption*)
  - Per non produrre niente non servono input
  - Il vettore $z_0 = (0; 0; 0)$ appartiene a Z
  - Ipotesi accettabile nel lungo periodo
    - Nel breve periodo è difficile credere che sia possibile interrompere la produzione senza costi

Ipotesi 1+2+3+4+5

Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

Ipotesi 2: Ipotesi di *free disposal* per gli output

+

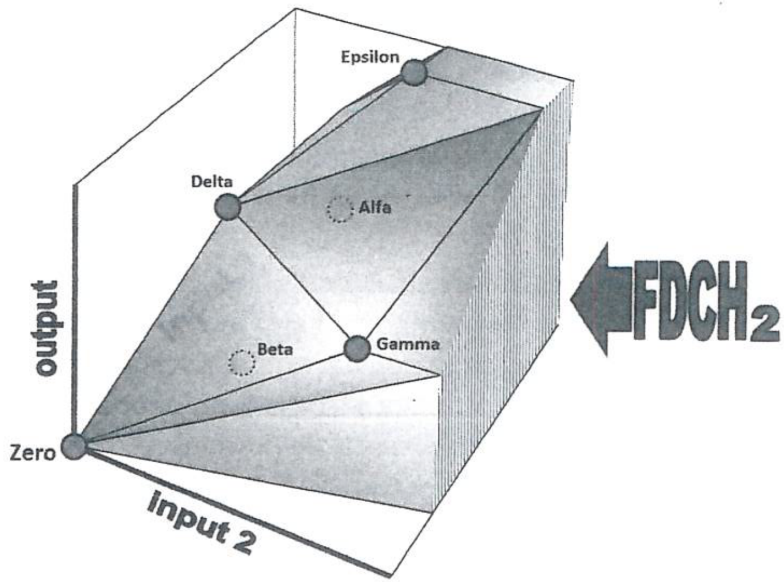
Ipotesi 3: Ipotesi di *free disposal* per gli input

+

Ipotesi 4: Convessità

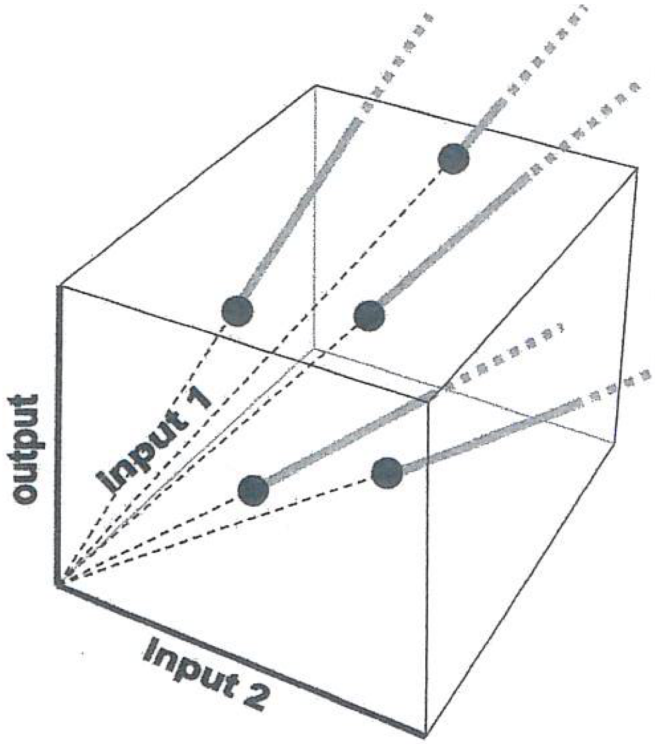
+

Ipotesi 5: Possibilità di inazione



Ipotesi 6

- Possibilità di «aumentare la scala» (*constant return to scale*)
  - Ogni processo produttivo è replicabile su scala maggiore
  - Se z_1 appartiene a Z, allora anche $c \cdot z_1$ (con $c \geq 1$) appartiene a Z
  - Ipotesi forte, in quanto implica che non ci siano rendimenti decrescenti di scala (se aumento di c volte gli input è sempre possibile aumentare anche gli output almeno nella stessa proporzione c)



Ipotesi 1+2+3+4+5+6

Ipotesi 1: I processi produttivi osservati appartengono a Z

+

Ipotesi 2: Ipotesi di *free disposal* per gli output

+

Ipotesi 3: Ipotesi di *free disposal* per gli input

+

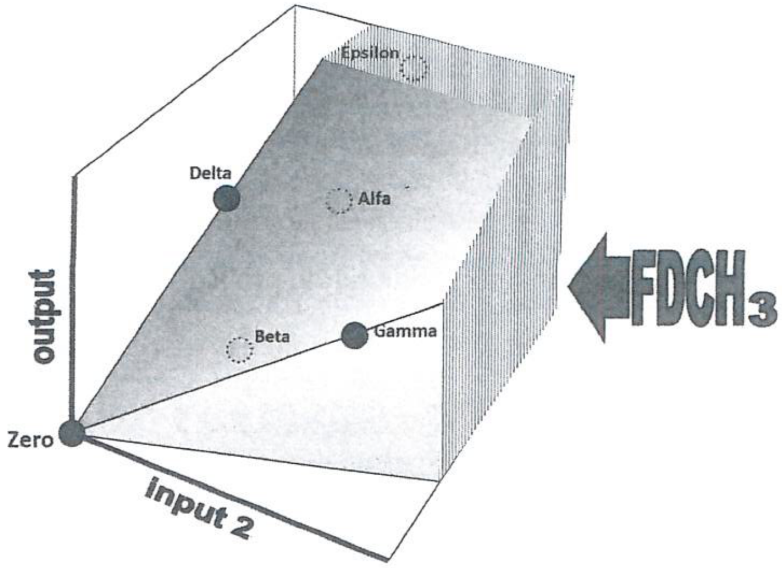
Ipotesi 4: Convessità

+

Ipotesi 5: Possibilità di inazione

+

Ipotesi 6: Possibilità di aumentare la scala

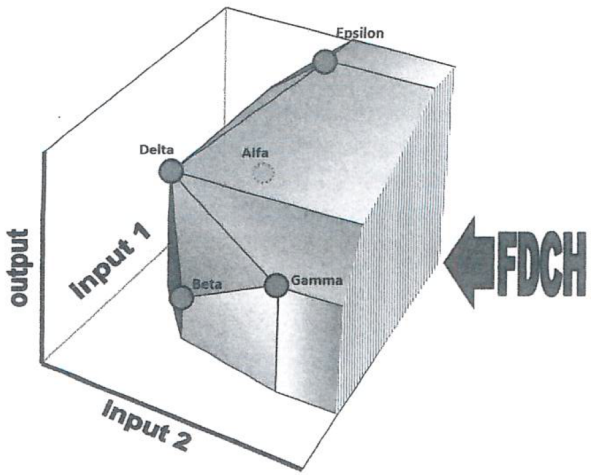


Alcune frontiere stimabili con la DEA (1/2)

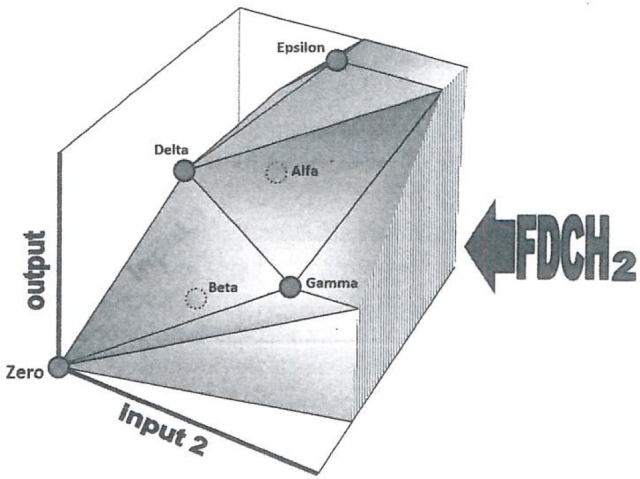
- La superficie dei poliedri convessi illustrati nelle precedenti figure, che racchiude l'insieme di produzione, è la frontiera dell'insieme di produzione
- In base alle ipotesi che si assumono vere, la frontiera sarà:
  - A rendimenti variabili (frontiera VRS): Ipotesi 1-4
    - Corrisponde all'insieme di produzione FDCH
  - A rendimenti non crescenti di scala (frontiera NIRS): Ipotesi 1-5
    - Corrisponde all'insieme di produzione $FDCH_2$
  - A rendimenti costanti di scala (frontiera CRS): Ipotesi 1-6
    - Corrisponde all'insieme di produzione $FDCH_3$

Alcune frontiere stimabili con la DEA (2/2)

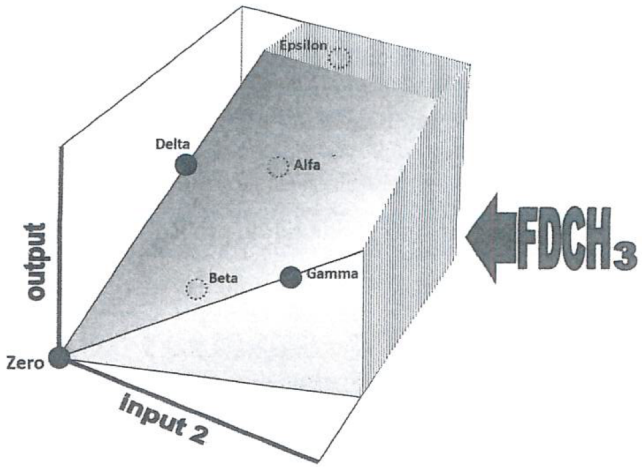
Frontiera VRS



Frontiera NIRS



Frontiera CRS



Punteggio di efficienza

- Il punteggio di efficienza prodotto dalla DEA è la misura dell'efficienza tecnica di Debreu-Farrell
- Esso esprime, quindi,
  - La massima espansione radiale dei livelli di output, o
  - La massima contrazione radiale dei livelli di input della DMU
- Può assumere valori tra 0 e 1
  - 0 -> massima distanza dalla frontiera=massima inefficienza
  - 1 -> unità decisionale che giace lungo la frontiera=…Attenzione! …=massima efficienza, solo se l'unità giace sul tratto efficiente della frontiera
- Varia a seconda della frontiera

Unità decisionali efficienti e inefficienti

- Solo le DMU che ottengono un punteggio pari a 1 e tutti gli *slack* pari a zero rappresentano i processi produttivi pienamente efficienti
- Tutte le DMU che ottengono un punteggio pari a 1 ma presentano almeno uno *slack* $\neq 0$ e tutti quelli racchiusi dalla frontiera dell'insieme di produzione (indipendentemente dal valore degli *slack*) sono in una certa misura inefficienti
  - Le prime sono unità decisionali collocate lungo la frontiera ma al di fuori del tratto efficiente
  - Le seconde sono unità decisionali collocate all'interno dell'insieme di produzione e otterranno un punteggio tanto più basso quanto più sono distanti dalla frontiera

Interpretazione dei risultati (1/3)

Slack / Punteggio	$= 0$	$\neq 0$
1	A	B
0<eff.<1	C	D

Interpretazione dei risultati (2/3)

A. DMU pienamente efficienti rispetto all'insieme delle unità decisionali sotto osservazione
B. DMU che
   - Non possono espandere ulteriormente la produzione di tutte le tipologie di output della stessa percentuale ma, per divenire efficienti, devono riuscire a produrre livelli più elevati di quelli in corrispondenza dei quali riportano *slack* $\neq 0$, mantenendo invariati tutti gli altri valori (output-efficienza)
   - Non possono contrarre ulteriormente i livelli di tutte le tipologie di input della stessa percentuale ma, per divenire efficienti, devono riuscire a ridurre i livelli più elevati di quelli in corrispondenza dei quali riportano *slack* $\neq 0$, mantenendo invariati tutti gli altri valori (input-efficienza)

Interpretazione dei risultati (3/3)

C. DMU che per divenire efficienti devono, in caso ad es. di punteggio di efficienza pari a 0.75,
   - Aumentare del 33% i livelli di tutti gli output (output-efficienza)
   - Ridurre del 25% i livelli di tutti gli input (input-efficienza)

D. DMU che per divenire efficienti devono, in caso ad es. di punteggio di efficienza pari a 0.75,
   - Aumentare del 33% i livelli di tutti gli output (output-efficienza) e ulteriormente aumentare la produzione di quelli nei confronti dei quali si registrano slack $\neq 0$ per azzerare il valore dello slack
   - Ridurre del 25% i livelli di tutti gli input (input-efficienza) e ulteriormente ridurre l'impiego di quelli nei confronti dei quali si registrano slack $\neq 0$ per azzerare il valore dello slack

Modello DEA CRS

Un esempio semplice – *input-oriented* (1/6)

- Consideriamo 3 DMU che impiegano due input per produrre un unico output. I livelli di input e di output di ciascuna DMU sono riportati nella seguente tabella

DMU	x_1	x_2	y	x_1/y	x_2/y
A	6	12	3	2	4
B	1	3	1	1	3
C	4	2	2	2	1

- Consideriamo la DMU «A»
- Nella formulazione più semplice del modello DEA (CRS) l'orientamento non conta, tuttavia dovendo impostare un modello di programmazione lineare per ogni DMU, bisogna selezionare il quesito al quale si desidera rispondere. In questo caso, si opta per il seguente

  Esiste una DMU reale o almeno una DMU virtuale che riesce a realizzare gli stessi livelli di output della DMU di riferimento impiegando minori livelli di input?

Un esempio semplice – *input-oriented* (2/6)

- Prima di impostare un modello di programmazione lineare per la DMU «A» definiamo le seguenti due variabili
  - $\lambda_B \in \mathbb{R}$ che rappresenta la frazione della DMU «B» utilizzata nella composizione della DMU virtuale
  - $\lambda_C \in \mathbb{R}$ che rappresenta la frazione della DMU «C» utilizzata nella composizione della DMU virtuale

- Il modello di programmazione lineare da risolvere per rispondere al quesito che ci siamo posti in relazione alla DMU «A» si imposta seguendo un semplice ragionamento: cerco una DMU virtuale che
  - Produca almeno lo stesso livello di y di «A» $\lambda_B + \lambda_C \geq 1$
  - Impiegando un livello di x_1 inferiore di «A» $\lambda_B + 2\lambda_C \leq 2 - \varepsilon$
  - Impiegando un livello di x_2 inferiore di «A» $3\lambda_B + \lambda_C \leq 4 - \varepsilon$

$\varepsilon > 0$; è una quantità molto piccola scelta opportunamente

Un esempio semplice – *input-oriented* (3/6)

Ma tra tutte le unità virtuali che rispettano tali condizioni, voglio individuare quella che domina maggiormente «A», cioè quella che producendo almeno la stessa quantità di output prodotta da «A» richiede la minima frazione dei livelli di input impiegati da «A». A tal proposito, definiamo la variabile reale $\boldsymbol{\theta}$ che rappresenta la misura dell'input-efficienza della DMU «A». Imposto un modello di programmazione lineare dove i pesi ($\boldsymbol{\lambda_j}$) e la misura di input-efficienza ($\boldsymbol{\theta}$) sono le variabili da ottimizzare:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \theta \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_B + 2\lambda_C \leq 2\theta \\
& 3\lambda_B + \lambda_C \leq 4\theta \\
& \lambda_B + \lambda_C \geq 1 \\
& \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Un esempio semplice – *input-oriented* (4/6)

- Soluzione:
  - $\theta = 0.625$ è il punteggio di input-efficienza della DMU «A»
  - $\lambda_B = 0.75$ è la frazione della DMU «B» utilizzata nella composizione della DMU virtuale di riferimento per «A»
  - $\lambda_C = 0.25$ è la frazione della DMU «C» utilizzata nella composizione della DMU virtuale di riferimento per «A»
- In altre parole,
  - La DMU «A» avrebbe potuto realizzare il livello di output y impiegando il 62.5% dei livelli di entrambi gli input effettivamente impiegati

$0.625 \cdot x_1^A = 0.625 \cdot 2 = 1.25$ minima frazione del livello di input x_1 impiegato da «A» necessaria per produrre y

$0.625 \cdot x_2^A = 0.625 \cdot 4 = 2.50$ minima frazione del livello di input x_2 impiegato da «A» necessaria per produrre y

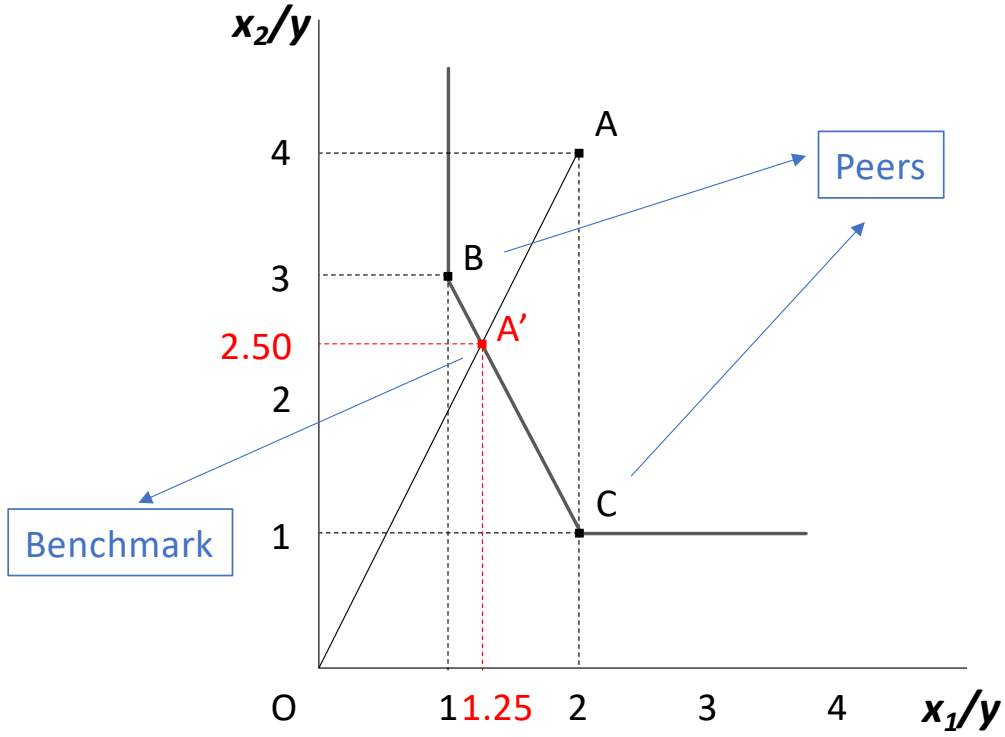
  - λ_B e λ_C sono i pesi con i quali le DMU «B» e «C» intervengono nelle combinazioni lineari che definiscono gli input della DMU virtuale di riferimento di «A» (o più semplicemente *benchmark*) che chiameremo «A'». Cioè, i livelli di x_1 e x_2 corrispondenti alla DMU «A'» si calcolano nel modo seguente:

$x_1^{A'} = (\lambda_B \cdot x_1^B) + (\lambda_C \cdot x_1^C) = (0.75 \cdot 1) + (0.25 \cdot 2) = 1.25$ quantità di input x_1 impiegata dalla DMU «A'» per produrre y

$x_2^{A'} = (\lambda_B \cdot x_2^B) + (\lambda_C \cdot x_2^C) = (0.75 \cdot 3) + (0.25 \cdot 1) = 2.50$ quantità di input x_2 impiegata dalla DMU «A'» per produrre y

Un esempio semplice – *input-oriented* (5/6)

Rappresentazione grafica



Un esempio semplice – *input-oriented* (6/6)

- Per misurare l'input-efficienza delle DMU «B» e «C» si risolvono i relativi modelli di programmazione lineare
- I risultati dei 3 modelli sono riportati nella seguente tabella:

DMU	θ	λ_A	λ_B	λ_C
A	0.625	0	0.75	0.25
B	1	0	1	0
C	1	0	0	1

Il generico modello DEA-CRS *input-oriented*

- Date K DMU $(j = 1, \dots, K)$ ciascuna delle quali produce N output $(y_{j1}, \dots, y_{jN})$ impiegando M input $(x_{j1}, \dots, x_{jM})$, consideriamo una generica DMU j_0. Indicando con λ_j i pesi con i quali le varie unità intervengono nelle combinazioni lineari che definiscono gli input dell'unità virtuale di riferimento, e con θ_0 la misura di input-efficienza generica DMU j_0, il modello di programmazione lineare da risolvere per individuare il valore dell'input-efficienza (θ_0) della DMU j_0 e individuare i valori dei pesi (λ_j) è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \theta_0 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{K} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_0 x_{ij_0} \qquad (\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{M}) \\
& \sum_{j=1}^{K} \lambda_j y_{hj} \geq y_{hj_0} \qquad (\mathrm{h} = 1, \dots, \mathrm{N}) \\
& \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Un esempio semplice – *output-oriented* (1/6)

- Consideriamo 3 DMU che impiegano un input per produrre due output. I livelli di input e di output di ciascuna DMU sono riportati nella seguente tabella

DMU	x	y_1/x	y_2/x
A	1	6	3
B	1	10	2
C	1	7	5

- Consideriamo la DMU «A»
- In questo caso, proveremo a rispondere al seguente quesito

  Esiste una DMU reale o almeno una DMU virtuale che impiegando gli stessi livelli di input della DMU di riferimento riesce a realizzare livelli superiori di output?

Un esempio semplice – *output-oriented* (2/6)

- Prima di impostare un modello di programmazione lineare per la DMU «A» definiamo le seguenti due variabili
  - $\lambda_B \in \mathbb{R}$ che rappresenta la frazione della DMU «B» utilizzata nella composizione della DMU virtuale
  - $\lambda_C \in \mathbb{R}$ che rappresenta la frazione della DMU «C» utilizzata nella composizione della DMU virtuale

- Il modello di programmazione lineare da risolvere per rispondere al quesito che ci siamo posti in relazione alla DMU «A» si imposta seguendo un semplice ragionamento: cerco una DMU virtuale che
  - Produca un livello di y_1 superiore ad «A» $\quad 10\lambda_B + 7\lambda_C \geq 6 + \varepsilon$
  - Produca un livello di y_2 superiore ad «A» $\quad 2\lambda_B + 5\lambda_C \geq 3 + \varepsilon$
  - Impiegando un livello di x non superiore ad «A» $\quad \lambda_B + \lambda_C \leq 1$

$\varepsilon > 0$; è una quantità molto piccola scelta opportunamente

Un esempio semplice – *output-oriented* (3/6)

Ma tra tutte le unità virtuali che rispettano tali condizioni, voglio individuare quella che domina maggiormente «A», cioè quella che impiegando la stessa quantità di input impiegata da «A» ottenga il massimo livello ottenibile di entrambi gli output. A tal proposito, definiamo la variabile reale ϕ che rappresenta una variabile da cui ricavo la misura di output-efficienza della DMU «A». Imposto un modello di programmazione lineare dove i pesi λ_j e la variabile ϕ sono le variabili da ottimizzare:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \phi \\
\text{s.t.} \quad & 10\lambda_B + 7\lambda_C \geq 6\phi \\
& 2\lambda_B + 5\lambda_C \geq 3\phi \\
& \lambda_B + \lambda_C \leq 1 \\
& \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Un esempio semplice – *output-oriented* (4/6)

- Soluzione:
  - $\phi = 1.33$ $\quad 1/\phi = 0.75$ è il punteggio di output-efficienza della DMU «A»
  - $\lambda_B = 0.33$ è la frazione della DMU «B» utilizzata nella composizione della DMU virtuale di riferimento per «A»
  - $\lambda_C = 0.67$ è la frazione della DMU «C» utilizzata nella composizione della DMU virtuale di riferimento per «A»
- In altre parole,
  - La DMU «A» impiegando il livello di input x avrebbe potuto realizzare il 33% in più degli di entrambi gli output effettivamente prodotti

$1.33 \cdot y_1^A = 1.33 \cdot 6 = 8$ massima espansione del livello di output y_1 realizzato da «A» impiegando x

$1.33 \cdot y_2^A = 1.33 \cdot 3 = 4$ massima espansione del livello di output y_2 realizzato da «A» impiegando x

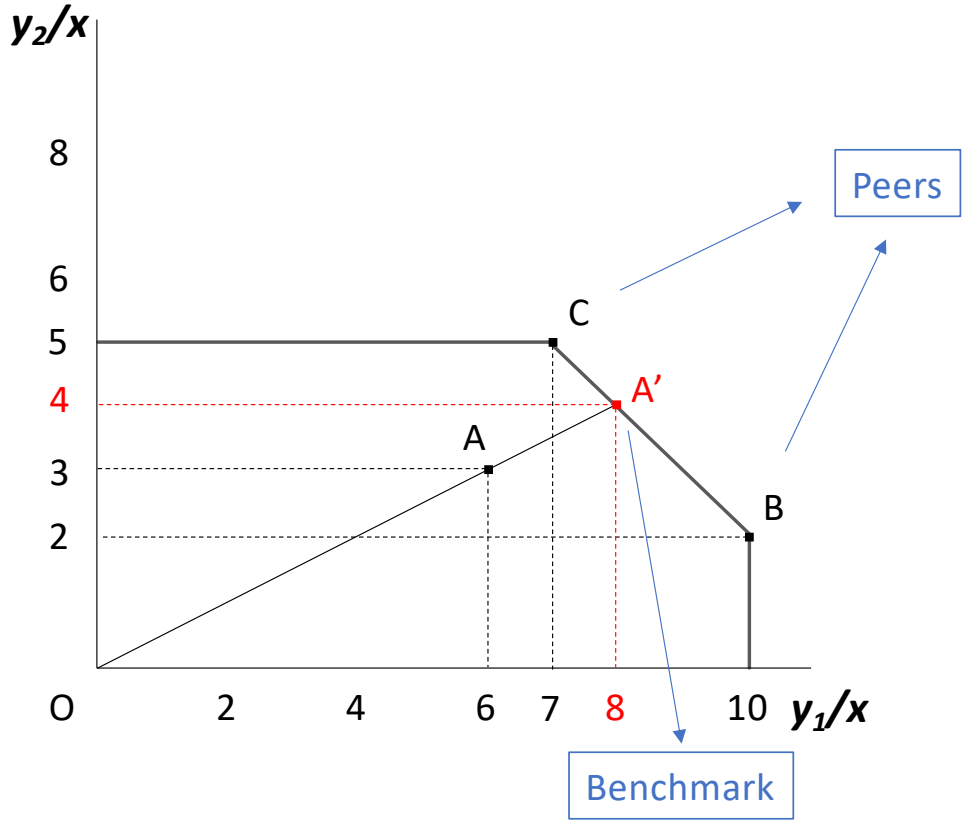
  - λ_B e λ_C sono i pesi con i quali le DMU «B» e «C» intervengono nelle combinazioni lineari che definiscono gli output DMU virtuale di riferimento di «A» (o più semplicemente *benchmark*) che chiameremo «A'». Cioè, i livelli di y_1 e y_2 corrispondenti alla DMU «A'» si calcolano nel modo seguente:

$y_1^{A'} = (\lambda_B \cdot y_1^B) + (\lambda_C \cdot y_1^C) = (0.33 \cdot 10) + (0.67 \cdot 7) = 8$ quantità di output y_1 realizzata dalla DMU «A'» impiegando x

$y_2^{A'} = (\lambda_B \cdot y_2^B) + (\lambda_C \cdot y_2^C) = (0.33 \cdot 2) + (0.67 \cdot 5) = 4$ quantità di output y_2 realizzata dalla DMU «A'» impiegando x

Un esempio semplice – *output-oriented* (5/6)

Rappresentazione grafica



Un esempio semplice – *output-oriented* (6/6)

- Per misurare l'input-efficienza delle DMU «B» e «C» si risolvono i relativi modelli di programmazione lineare
- I risultati dei 3 modelli sono riportati nella seguente tabella:

DMU	ϕ	λ_A	λ_B	λ_C
A	1.33	0	0.33	0.67
B	1	0	1	0
C	1	0	0	1

Il generico modello DEA-CRS *output-oriented*

- Date K DMU $(j = 1, \dots, K)$ ciascuna delle quali produce N output $(y_{j1}, \dots, y_{jN})$ impiegando M input $(x_{j1}, \dots, x_{jM})$, consideriamo una generica DMU j_0. Indicando con λ_j i pesi con i quali le varie unità intervengono nelle combinazioni lineari che definiscono gli input dell'unità virtuale di riferimento, e con ϕ_0 la variabile da cui ricavo la misura di output-efficienza della generica DMU j_0, il modello di programmazione lineare da risolvere per individuare il valore della variabile ϕ_0 e individuare i valori dei pesi λ_j è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \phi_0 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{K} \lambda_j y_{hj} \geq \phi_0 y_{hj_0} \qquad (\mathrm{h} = 1, \dots, \mathrm{N}) \\
& \sum_{j=1}^{K} \lambda_j x_{ij} \leq x_{ij_0} \qquad (\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{M}) \\
& \lambda_j \geq 0
\end{aligned}
$$

Realizzare analisi DEA con R

Realizzare analisi DEA con R

- R è
  - un ambiente per il calcolo statistico, in continuo sviluppo e costantemente aggiornato
  - open-source disponibile come software gratuito (free software) grazie al R Development Core Team (2009)
  - disponibile per tutti e tre i sistemi operativi più diffusi, cioè per Windows, per MacOS X e per Linux
- R ha un core di funzioni già scritte che sono disponibili all'utente e consente di istallare o caricare delle estensioni per svolgere ulteriori compiti particolari. Queste estensioni sono chiamate *pacchetti* (*package*)
- Alcuni dei pacchetti che consentono di eseguire l'analisi DEA sono:
  - Benchmarking
  - FEAR
  - rDEA
  - productivity

Package «Benchmarking»

- Il pacchetto **Benchmarking** è stato sviluppato da Peter Bogetoft e Lars Otto
- Esso consente di stimare le tecnologie e misurare l'efficienza usando DEA, FDH, e SFA
- In merito alla DEA, consente di
  - eseguire i modelli vrs, drs, crs, irs, e add
  - calcolare diverse misure di efficienza (input based, output based, grafico iperbolico, additivo, super-efficienza, direzionale)
  - ottenere tutte le informazioni ricavabili dal modello stimato
  - rappresentare graficamente la tecnologia (solo grafici a due dimensioni)
- Per realizzare delle analisi semplici con questo pacchetto, una volta avviato il programma (R), è necessario caricarlo con:
  - `library(Benchmarking)`

Esercizio 1 Modello DEA a rendimenti costanti

- Si realizzi un'analisi con modello DEA a rendimenti costanti di scala sul seguente insieme di unità decisionali

DMU	x_1	x_2	y	x_1/y	x_2/y
A	6	12	3	2	4
B	1	3	1	1	3
C	4	2	2	2	1

- R script

```
x1_es1<-c(2, 1, 2)
x2_es1<-c(4, 3, 1)
x_es1<-cbind(x1_es1, x2_es1)
rownames(x_es1)<-c("A", "B", "C")
y_es1<-c(1, 1, 1)
y_es1<-cbind(y_es1)
rownames(y_es1)<-c("A", "B", "C")
eff_CRS_in_es1<-dea(x_es1, y_es1, RTS="crs", ORIENTATION="in")
eff(eff_CRS_in_es1)
peers(eff_CRS_in_es1, NAMES=TRUE)
lambda(eff_CRS_in_es1)
data.frame(eff(eff_CRS_in_es1),lambda(eff_CRS_in_es1))
pot_in_rad_sav_es1<- (1-eff(eff_CRS_in_es1)) * x_es1
summary(eff_CRS_in_es1)
dea.plot.isoquant(x1_es1,x2_es1,RTS="crs",txt=rownames(x_es1))
```

Esercizio 2 Modello DEA a rendimenti costanti

- Si realizzi un'analisi con modello DEA a rendimenti costanti di scala sul seguente insieme di unità decisionali

DMU	x	y_1/x	y_2/x
A	1	6	3
B	1	10	2
C	1	7	5

- R script

```
x_es2<-c(1, 1, 1)
x_es2<-cbind(x_es2)
rownames(x_es2)<-c("A", "B", "C")
y1_es2<-c(6, 10, 7)
y2_es2<-c(3, 2, 5)
y_es2<-cbind(y1_es2, y2_es2)
rownames(y_es2)<-c("A", "B", "C")
eff_CRS_out_es2<-dea(x_es2, y_es2, RTS="crs", ORIENTATION="out")
eff(eff_CRS_out_es2)
1/eff(eff_CRS_out_es2)
peers(eff_CRS_out_es2, NAMES=TRUE)
lambda(eff_CRS_out_es2)
data.frame(eff(eff_CRS_out_es2),lambda(eff_CRS_out_es2))
pot_out_rad_incr_es2<-((eff_CRS_out_es2$eff)*y_es2) - y_es2
summary(eff_CRS_out_es2)
dea.plot.transform(y1_es2,y2_es2,RTS="crs",txt=rownames(y_es2))
```

Riferimenti bibliografici (1/2)

- Aigner D., Chu S.F., 1968, On estimating the industry production function, «American Economic Review», vol. 58, n. 4, pp. 826-839
- Aigner D., Lovell C.A.K., Schmidt P., 1977, Formulation and estimation of stochastic production function models, «Journal of Econometrics», vol. 6, n. 1, pp. 21-37
- Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W., 1984, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, «Management Science», vol. 30, n. 9, pp. 1078-1092
- Biggeri L., Bini M., Coli A., Grassini L., Maltagliati M., 2012, Statistica per le decisioni aziendali, Pearson
- Bracalente B., Cossignani M., Mulas A., 2009, Statistica Aziendale, McGraw-Hill
- Charnes A., Cooper W., Rhodes E.., 1977), Measuringthe efficiency of Decision Making Units, «European Journal of Operation Research», vol. 2, n. 6, pp. 429-444
- Debreu G., 1951, The coefficient of resource utilization, «Econometrica», vol. 19, n. 3, pp. 273-292
- Deprins, D., Simar, L., Tulkens, H., 1984, Measuring labor-efficiency in post offices, in Marchand M., Pestieau P., Tulkens H. (a cura di), «The performance of public enterprises: concepts and measurement», North Holland, Amsterdam
- Farrell M.J., 1957, The measurement of productive efficiency of production, «Journal of the Royal Statistical Society», Series A, General, vol. 120, pp. 253-281

Riferimenti bibliografici (2/2)

- Frank R.H., 2010, Microeconomia, McGrow-Hill
- Koopmans T.C., 1951, Analisys of production as an efficient combinations of activities, in Koopmans T.C. (a cura di), «Activity analysis of production and allocation», Wiley, New York.
- Laureti T., 2006, L'efficienza rispetto alla frontiera delle possibilità produttive. Modelli teorici ed analisi empiriche, Firenze University Press
- Maietta O.W., 2008, L'analisi dell'efficienza. Tecniche di base ed estensioni recenti, Edizioni Scientifiche Italiane
- Meeusen W., Van De Broeck J., 1977, Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error, «International Economic Review», vol. 18, n. 2, pp. 435-444
- Nisticò A., Prosperetti L., 1991, Produzione e produttività, in Marbach G., «Statistica economica», Utet, Torino
- Petretto A., 1986, L'approccio econometrico per la misurazione dei risultati delle imprese pubbliche locali, «Politica economica», a. II, n. 2, pp. 203-224
- Rapacciuolo C., 2004, Misure di efficienza tecnica in due settori, CSC Working Paper n. 50
- Thanassoulis E., 2001, Introduction to the theory and application of data envelopment analysis: a foundation text with integrated software, Kluwer Academic Publishers
- Thiry B., Tulkens, H., 1988, Allowing for technical inefficiency in parametric estimates of production functions with an application to urban transit firms (No. 1988041). Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE).
- Varian H. R., 2007, Microeconomia, settima edizione, Cafoscarina