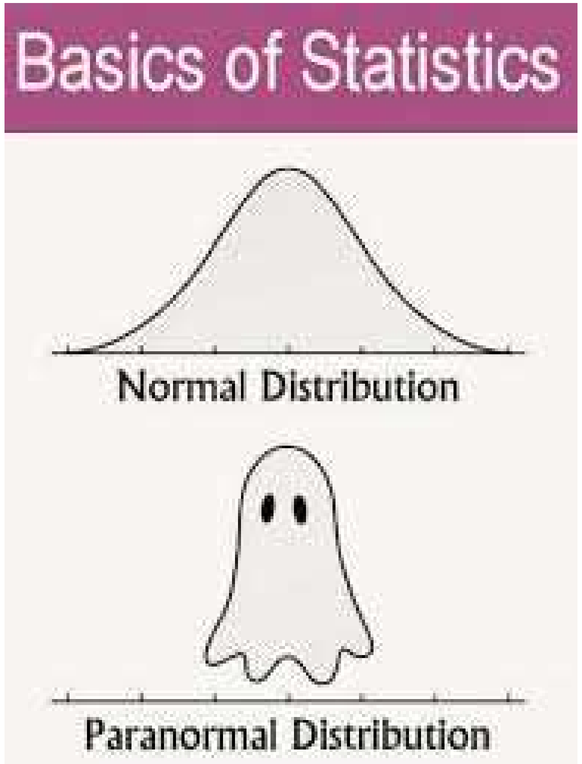
# Statistica della Formazione
# Slides

A.A. 2020-2021

Docente: ANNA LINA SARRA




# Distribuzione normale

# La distribuzione normale

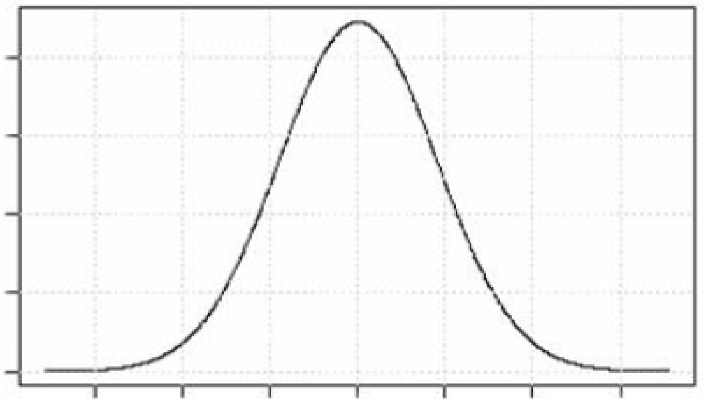
La Distribuzione **Normale** o **Gaussiana** è la distribuzione **più importante ed utilizzata in tutta la statistica**

- La curva delle frequenze della distribuzione Normale ha una forma caratteristica, simile ad una campana

- Il valore medio si trova esattamente al centro della distribuzione, e la curva è simmetrica rispetto ad esso: quindi valor medio, mediana e moda coincidono

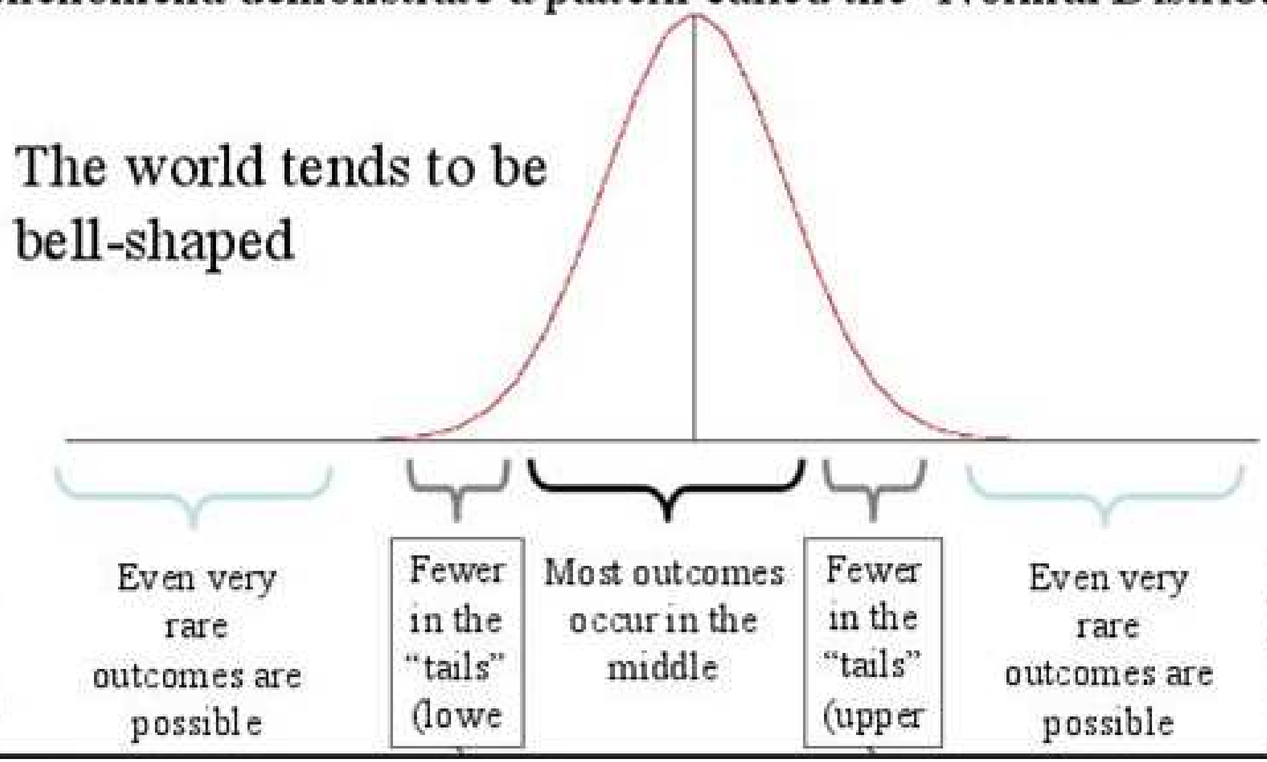
- La maggior parte delle osservazioni si concentrano intorno al valore medio

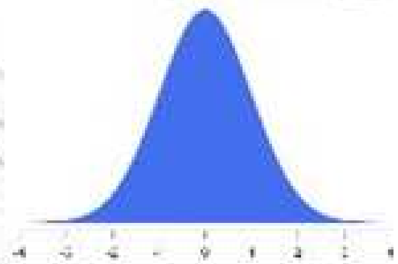
- Allontanandosi dal valore medio, la curva si avvicina sempre più all'asse delle ascisse ma non giunge mai a toccarlo: quindi si possono avere anche (pochissime) osservazioni che risultano molto distanti dalla media



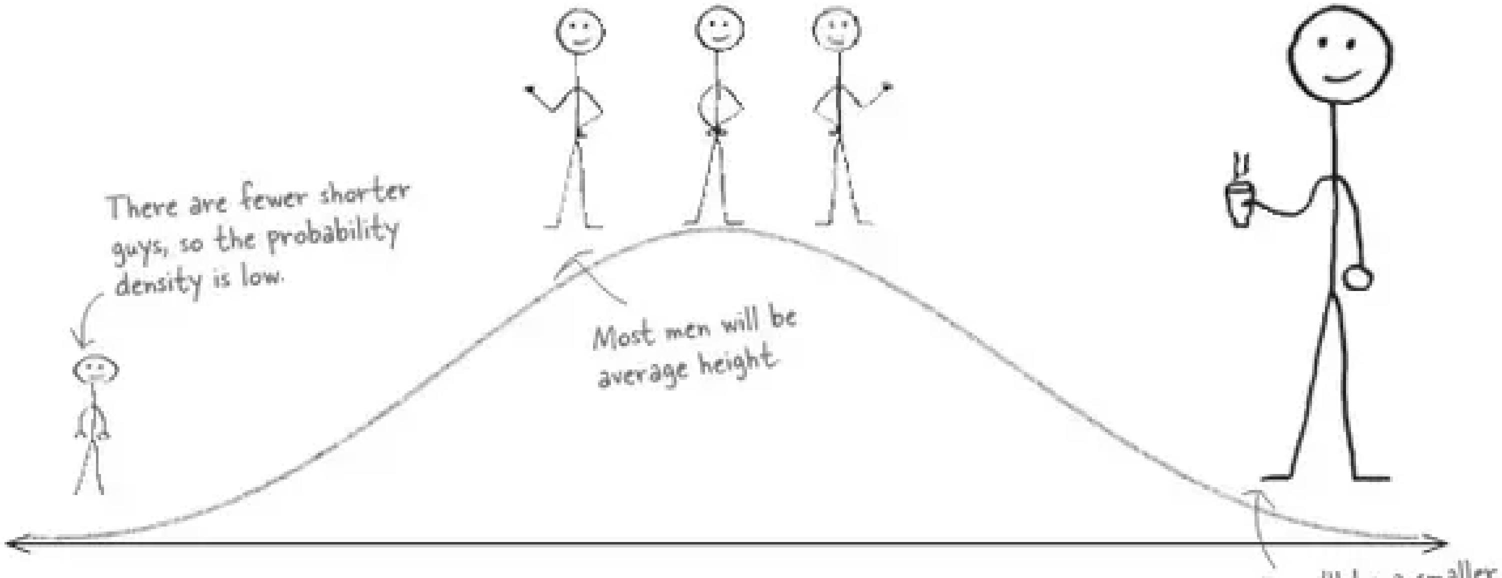
# Normal Distribution (Bell) Curve

- Mathematical concept called normal distribution
- Many natural phenomena demonstrate a pattern called the 'Normal Distribution' or 'Bell Curve'.



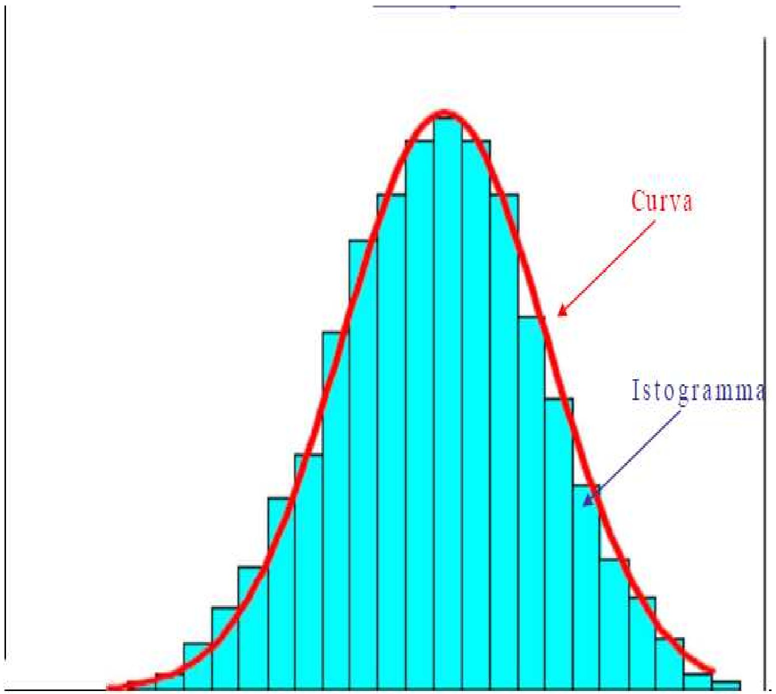



# Esempio altezze

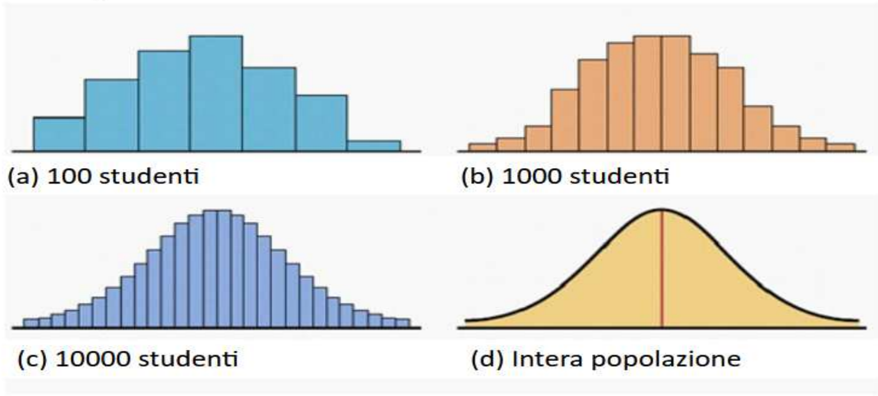



This shape of distribution is actually fairly common and can be applied to lots of situations. It's called the **normal distribution**.

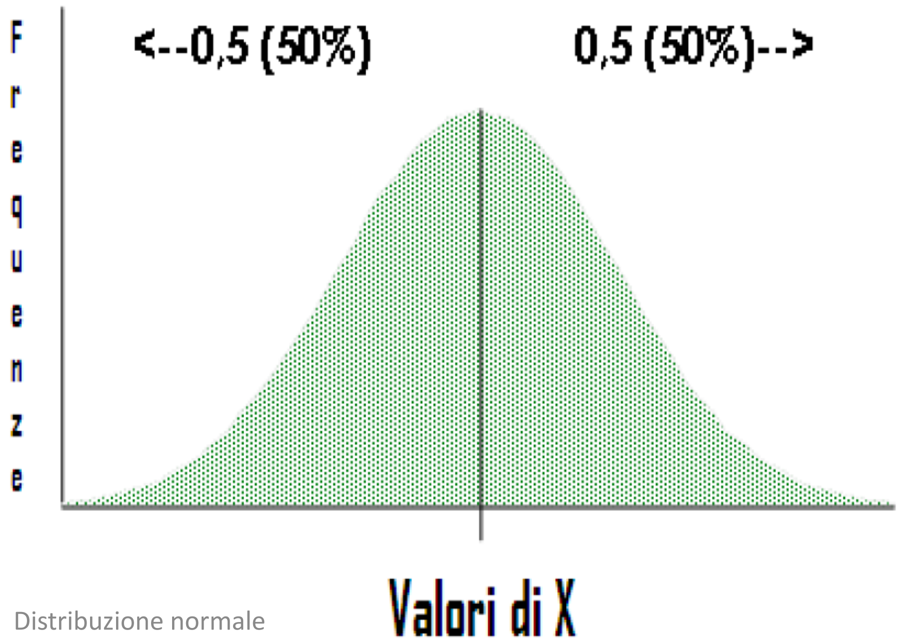
# La distribuzione normale



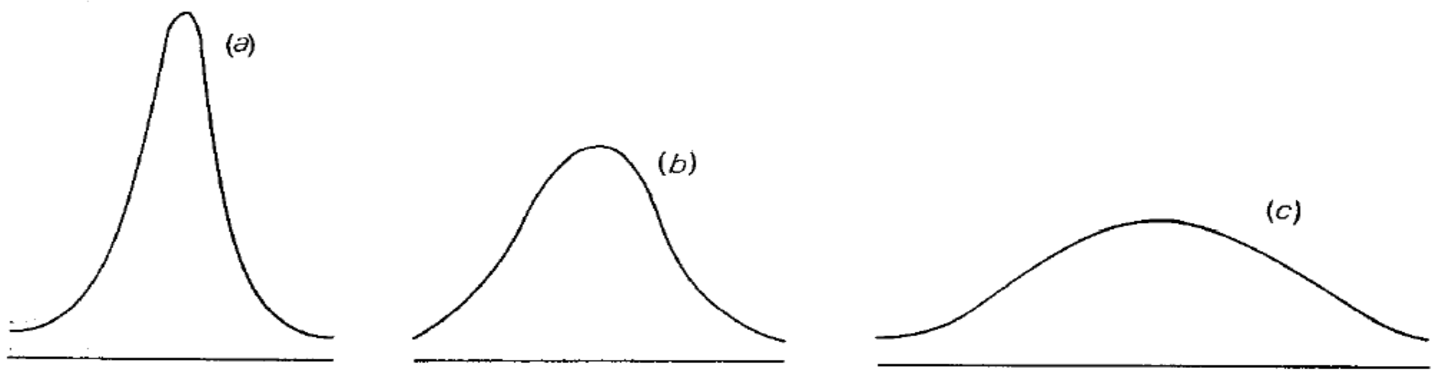

Istogramma della distribuzione delle altezze




Molte variabili continue seguono questa distribuzione!!!



# La distribuzione normale




## La Forma della Distribuzione Normale

La distribuzione Normale non descrive in realtà una sola distribuzione, ma piuttosto una famiglia di distribuzioni, tutte con la stessa forma a campana, ma **caratterizzate da media e varianza diverse**

Tutte le curve normali hanno cioè la stessa forma caratteristica, ma possono essere più strette e appuntite, oppure più larghe e piatte

# La funzione matematica della distribuzione normale

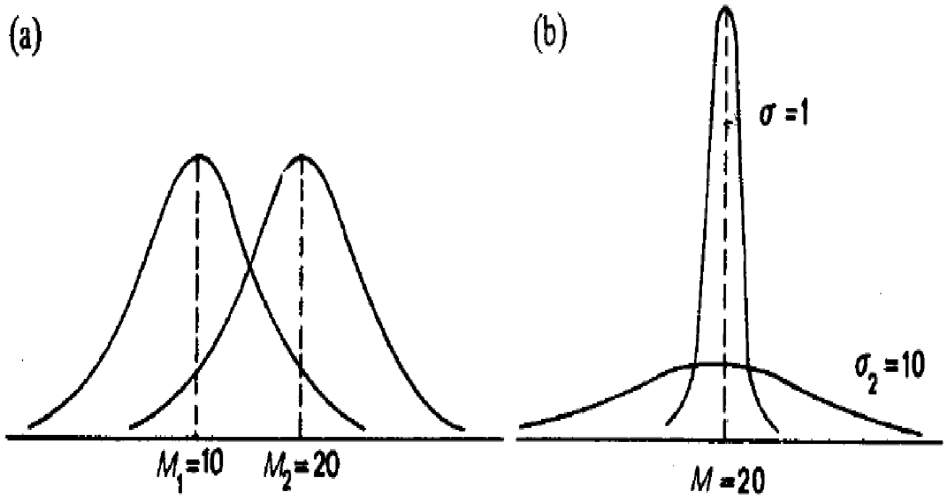
Una curva normale è definita in maniera univoca da due soli parametri:

**il valore medio e lo scarto quadratico medio della distribuzione stessa**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

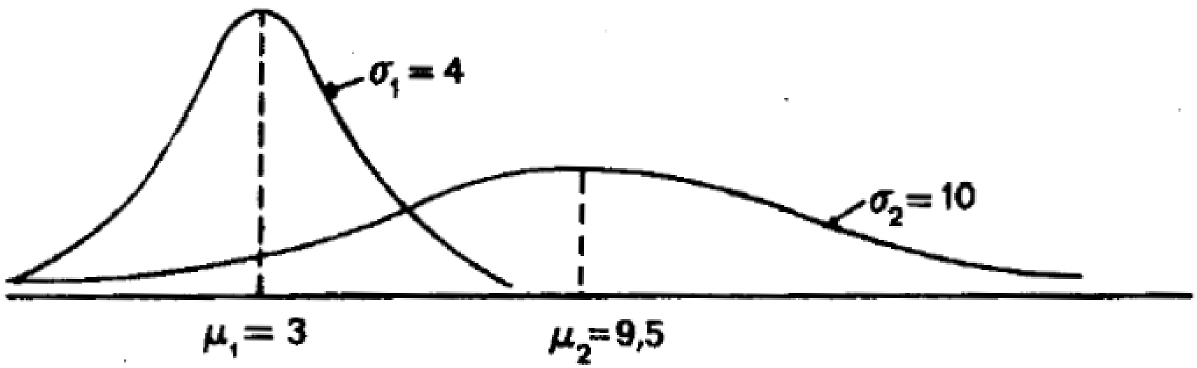
La funzione f(x) descrive, al variare dei valori assunti dai due parametri, una famiglia di curve normali :

- **se si varia μ** : si sposta orizzontalmente l'asse di simmetria della curva
- **se si varia σ :** la curva si allarga e appiattisce al crescere del valore di σ



# La distribuzione normale

**Variando contemporaneamente μ e σ** : la curva trasla orizzontalmente e contemporaneamente si fa più o meno appuntita




Una distribuzione Normale con media μ e scarto quadratico σ viene indicata semplicemente come: $N(\mu , \sigma)$

Per indicare che la variabile X si distribuisce come una Normale si scrive:

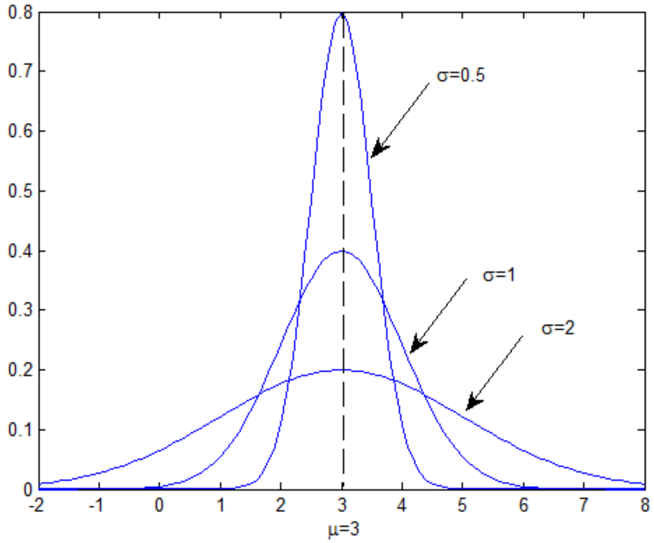
***x ~ N(μ,σ )***

# Posizione e forma della curva normale in funzione dei parametri μ e σ

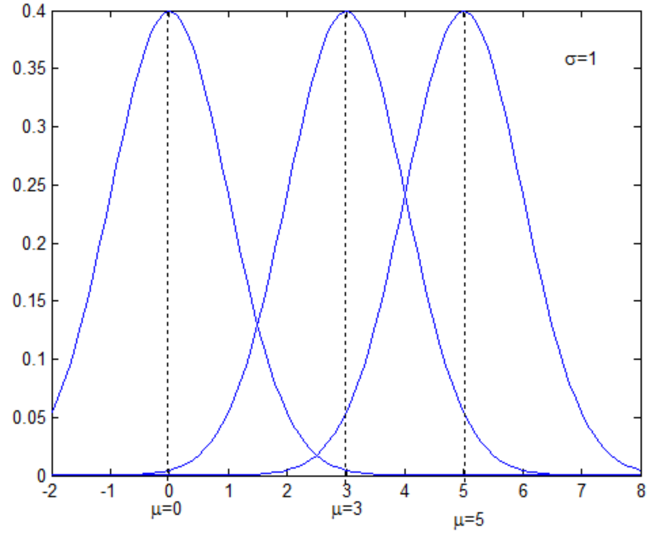
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < +\infty,$$

La media individua la posizione della curva lungo l’asse delle ascisse.
La varianza determina la concentrazione della curva attorno alla retta (figura a).

(a)

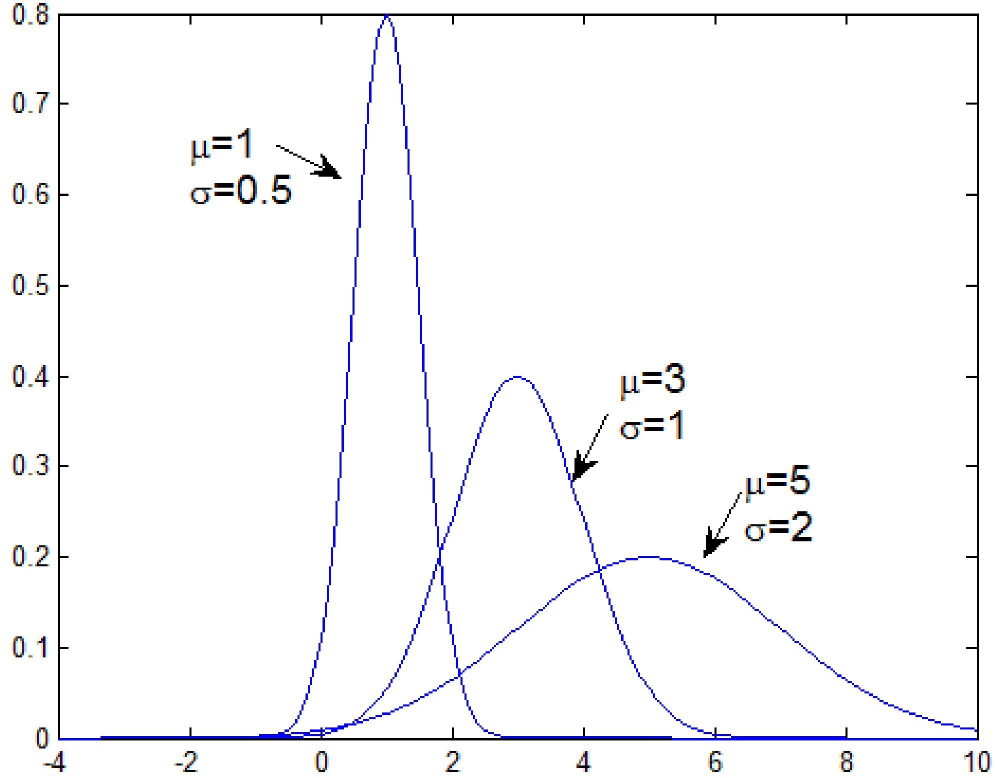



(b)




Distribuzioni normali: con medie uguali e varianze diverse, grafico *a*, con medie diverse e varianze uguali, grafico *b*.

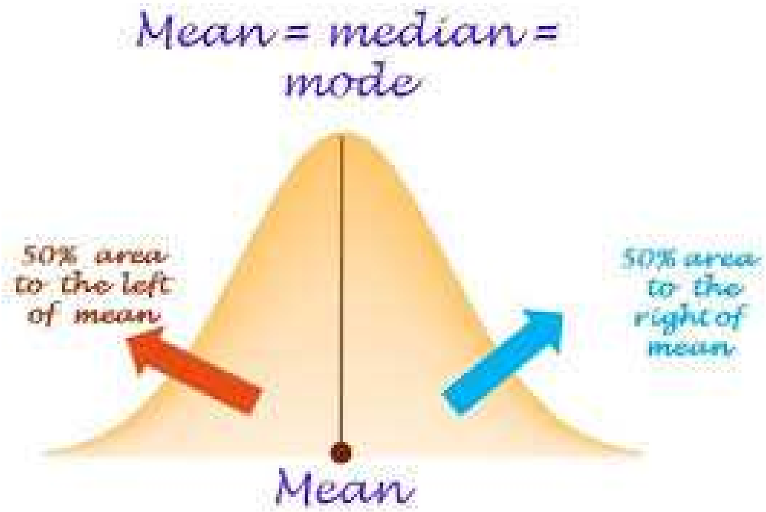
# Posizione e forma della curva normale in funzione dei parametri μ e σ



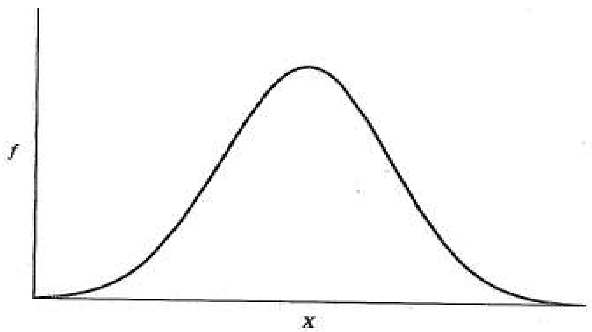
# Proprietà della distribuzione normale

- È simmetrica, avendo come asse di simmetria la retta $x = \mu$ ;
- È crescente nell'intervallo $(-\infty, \mu)$ e decrescente nell'intervallo $(\mu, \infty)$ ;
- Ha due punti di flesso in $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$;
- È concava (verso il basso) nell'intervallo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ e convessa altrove;
- Ha come asintoto l'asse delle $x$.

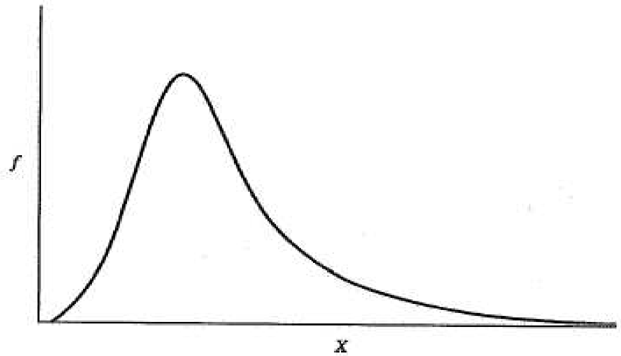
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < +\infty,$$



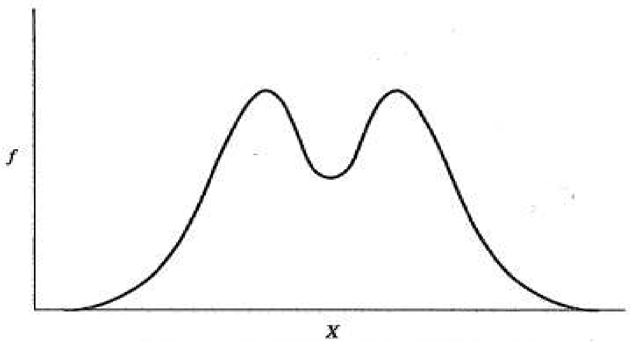
# Qual è la curva corretta?



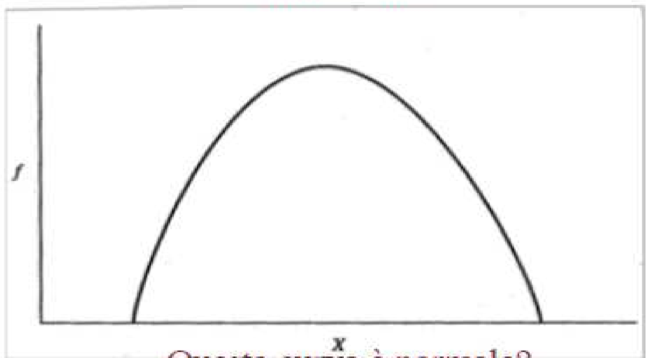

La curva normale è simmetrica, asintotica e unimodale




Questa curva è Normale? Simmetrica? Asintotica? Unimodale?



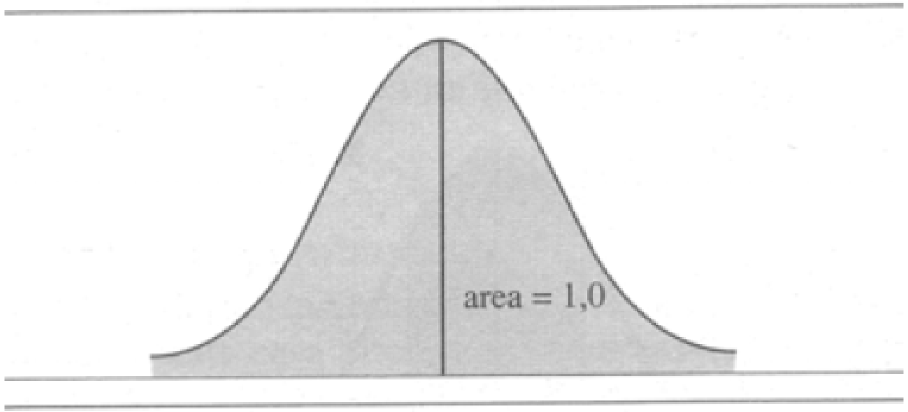

Questa curva è normale? Simmetrica? Asintotica? Unimodale?



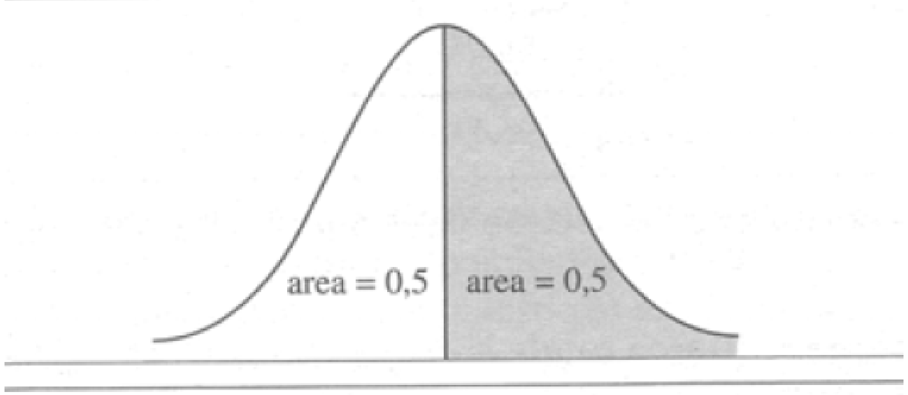

Questa curva è normale? Simmetrica? Asintotica? Unimodale?

# La distribuzione normale

Quando una curva descrive una distribuzione di frequenze relative, l'area totale sottesa alla curva è pari a 1 (la somma delle frequenze relative).



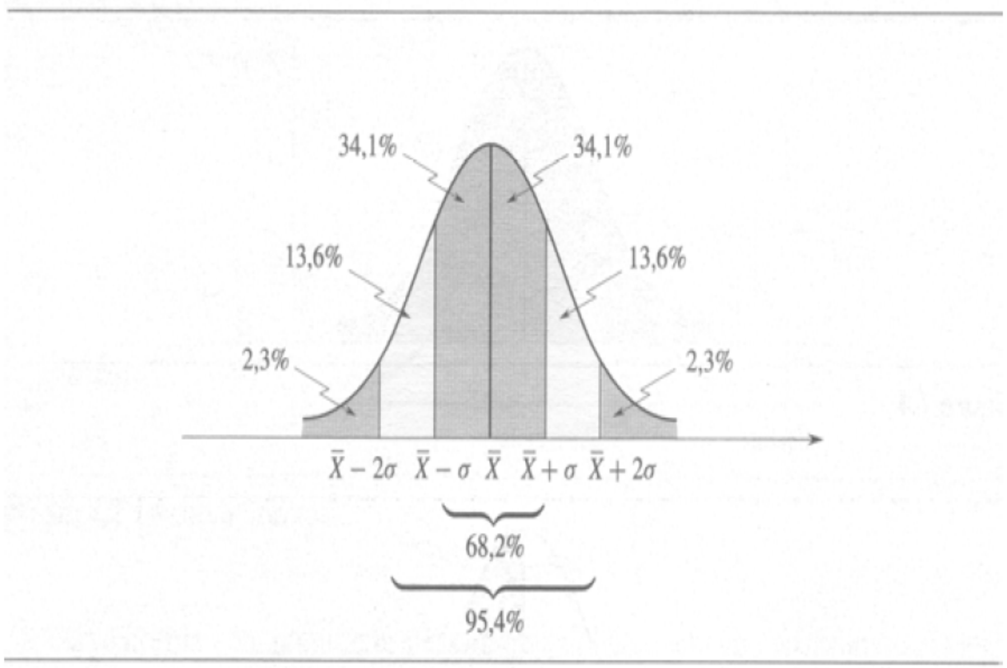

Dunque anche l'area sottesa alla distribuzione Normale è pari ad 1: allora per la simmetria della curva, l'area a sinistra della media è pari a ½, come pure l'area alla sua destra



# La distribuzione normale

Vi sono aree importanti sottese alla curva Normale, individuate in termini di scarti quadratici medi di distanza dalla media:

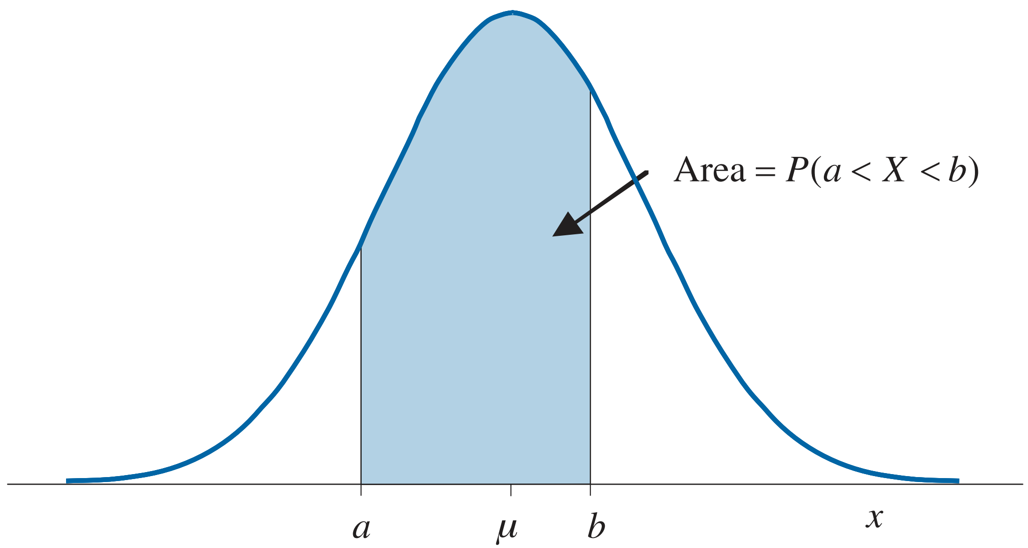
- lo 0,6826 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-\sigma)$ $e$ $(\bar{x}+\sigma)$
- lo 0,9544 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-2\sigma)$ $e$ $(\bar{x}+2\sigma)$
- lo 0,9973 dell'area si trova compresa tra $(\bar{x}-3\sigma)$ $e$ $(\bar{x}+3\sigma)$



# Funzione di densità della curva normale

La funzione di densità consente di calcolare la probabilità che la X assuma valori all'interno di un qualsiasi intervallo (*a*, *b*):

tale probabilità è data dall'**area sottesa alla curva normale in detto intervallo.**



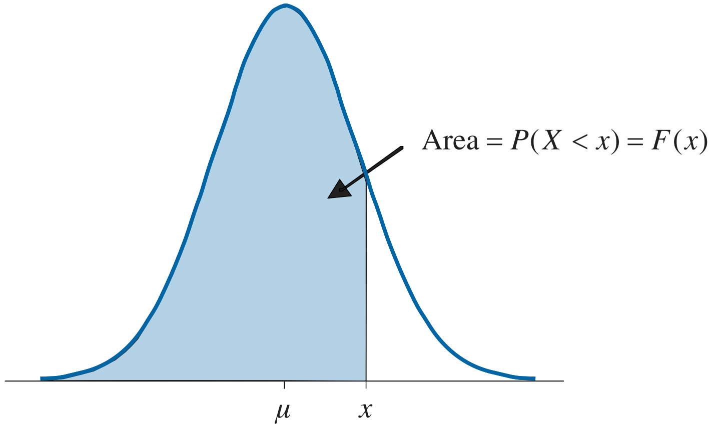

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

# Funzione di ripartizione della curva normale

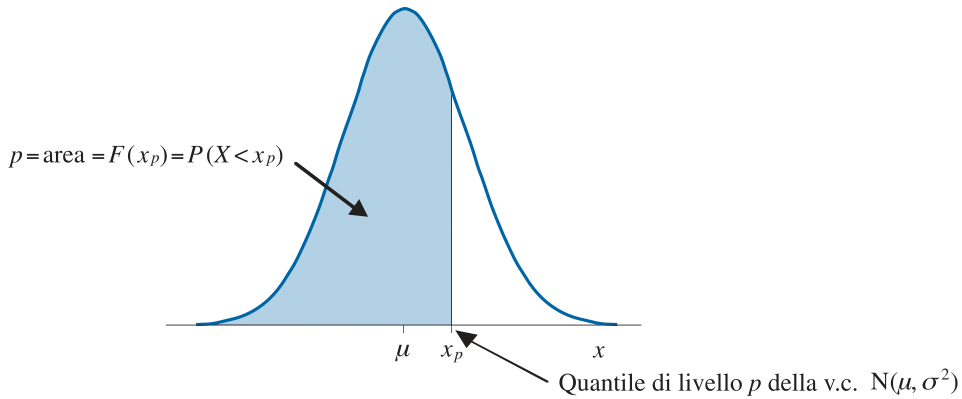
È la probabilità

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Graficamente $F(x)$ è rappresentata dall'area sottesa alla curva normale da - ∞ fino a $x$.




La funzione di ripartizione consente anche di calcolare i quantili della distribuzione normale.



# La distribuzione Normale Standardizzata

La distribuzione Normale è scomoda da usare per calcolare le aree di interesse, quando i valori critici non sono multipli esatti di sigma, perché dipende da due parametri ( μ e σ ).

Per questo si introduce la **Normale Standard**, ottenuta standardizzando la variabile Normale.

Data una variabile X, Normale con media μ e scarto quadratico σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

la trasformazione $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

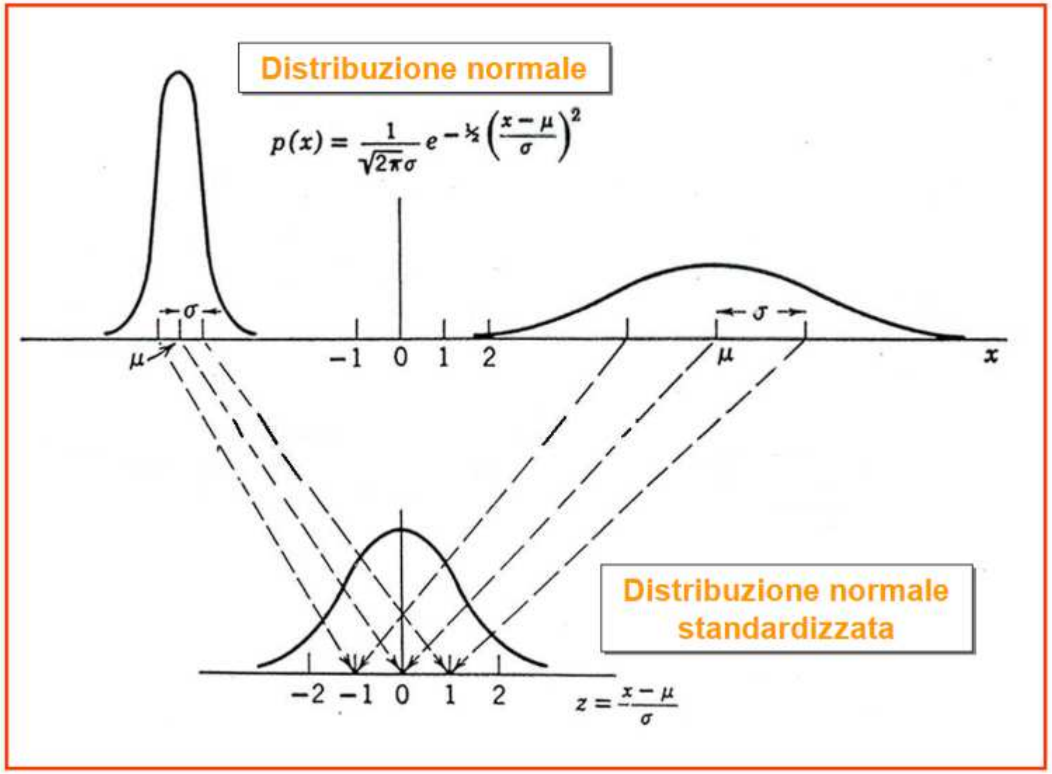
avrà media 0 e scarto quadratico medio uguale a 1.

La funzione f(z) risultante dalla trasformazione non dipende più da alcun parametro.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Questa distribuzione viene chiamata Normale Standard e indicata come: **N(0,1)**

# Distribuzione normale e distribuzione normale standardizzata

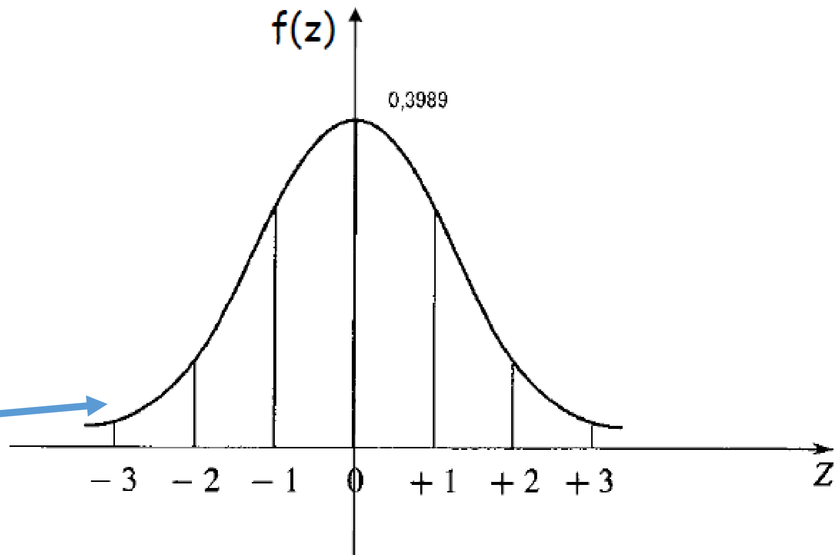


# La distribuzione Normale Standardizzata

La funzione Normale Standard ha la stessa forma della Normale completa, ma non contenendo nessun parametro, **descrive una unica e ben determinata curva**.

Valgono naturalmente tutte le proprietà viste per la Normale, con gli opportuni adattamenti per tenere conto del fatto che la media è 0 e la varianza è 1,quindi:

- la curva è centrata e simmetrica rispetto all'origine degli assi: z = 0
- il massimo delle frequenze si ha per z = 0 e vale f(0) = 0,3989
- le aree di interesse viste in precedenza diventano più semplicemente




Distribuzione normale

# Funzione di ripartizione

- La tavola della Normale Standard può essere realizzata in diversi formati

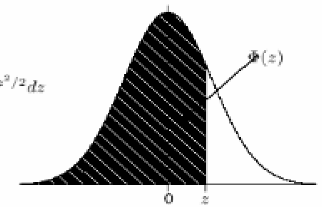
- **Uno dei formati più utilizzati è quello che riporta la Funzione di ripartizione F(z)** (frequenze cumulate), cioè l'intera area a sinistra di un dato valore z

.

Nei problemi di calcolo con la N conviene sempre per prima cosa **disegnare l'area** che ci interessa calcolare

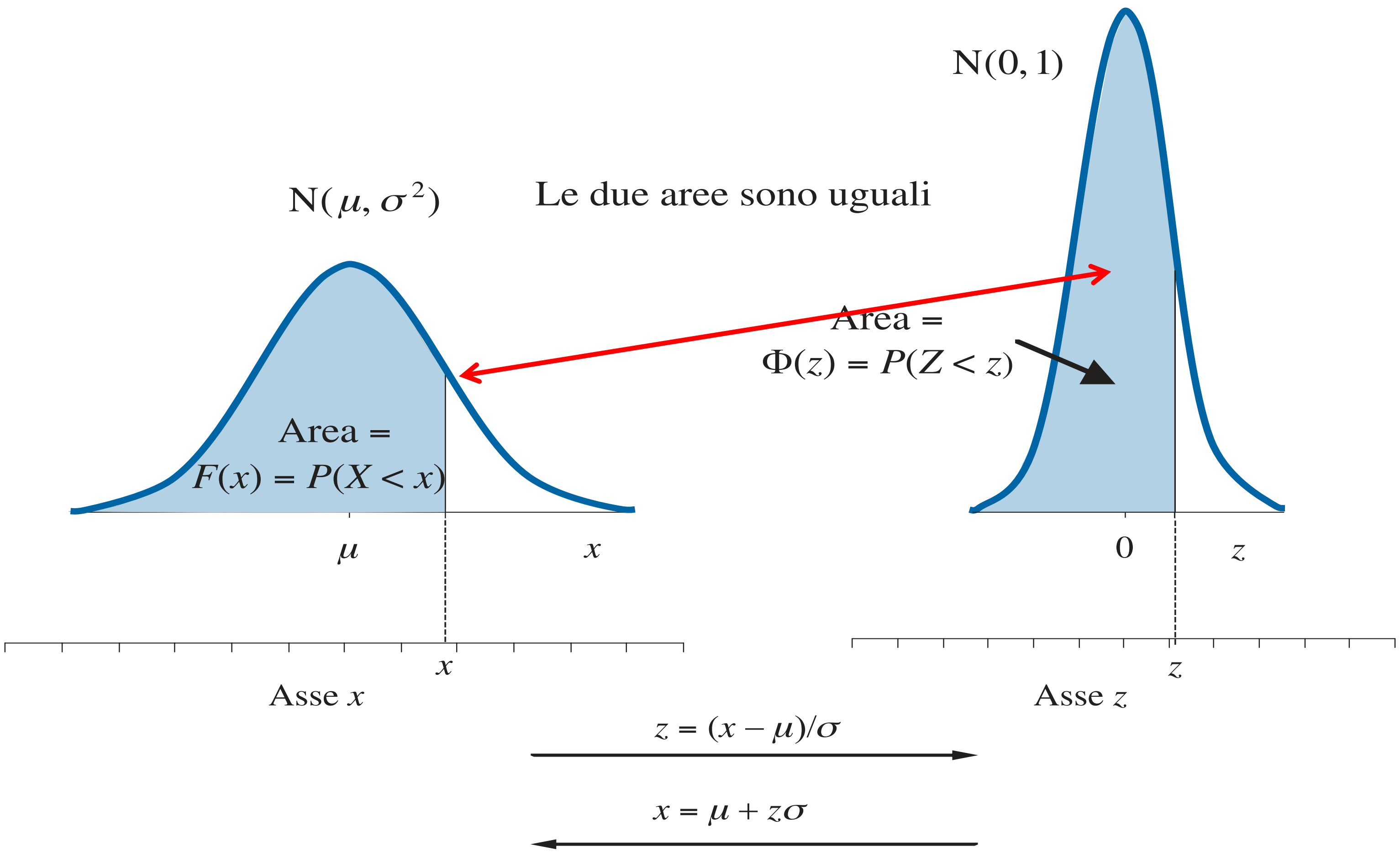
Tavola 1: Funzione di ripartizione della Variabile Casuale Normale Standardizzata

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$




| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |

# Dalla normale N(μ,σ 2) alla normale standardizzata N(0,1) e viceversa



# Problema diretto: calcolo delle aree

Il **problema diretto** consiste nella determinazione della probabilità che la variabile casuale assuma un valore compreso in un determinato intervallo.

Data la X che si distribuisce come una Normale con media m e deviazione standard s, per calcolare la probabilità che assuma valori compresi fra a e b, si deve

1. Determinare i valori $z_a$ e $z_b$ corrispondenti ad a e b rispetto alla normale standardizzata
2. Determinare l'area compresa fra tali $z_a$ e $z_b$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(z_a \leq Z \leq z_b\right) = \Phi\left(z_b\right) - \Phi\left(z_a\right)$$

# Esempio

Una variabile normale X ha media 8 e varianza 15. **N(8,15)**
Calcolare la probabilità che tale variabile sia compresa nell'intervallo (6.5, 8.3).

standardizzazione

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

standardizzazione

$$P(6.5 < X < 8.3) = P\left(\frac{6.5-8}{\sqrt{15}} < Z < \frac{8.3-8}{\sqrt{15}}\right) =$$

$$= \Phi(0.08) - \Phi(-0.39) = 0.5319 - 0.3483 = 0.1836.$$

# Esercizio

I punteggi di un test psicologico si distribuiscono **normalmente** con media 500 e scarto quadratico medio 10.

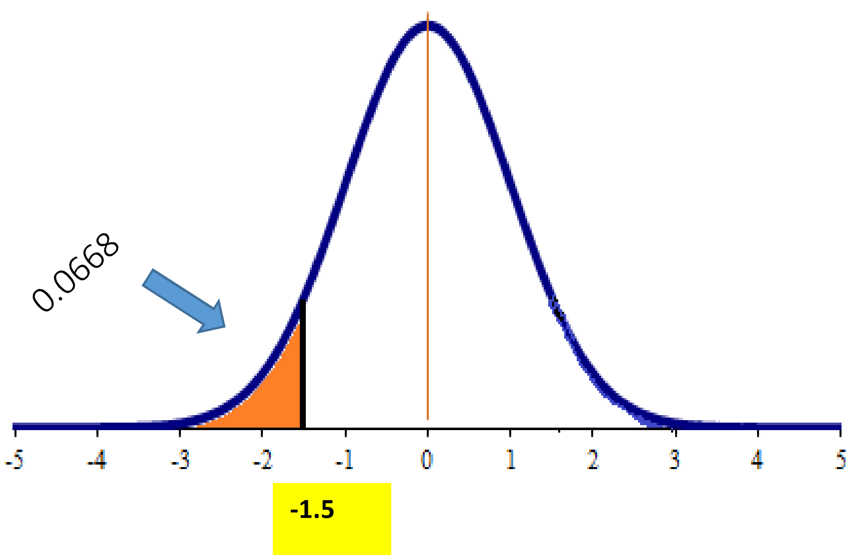
1. Calcolare la probabilità di ottenere un punteggio inferiore a 485.
2. Calcolare la probabilità che il punteggio sia compreso fra 490 e 512.

$X \sim N(500,100).$

1. probabilità che vengano erogati meno di 485

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{485-500}{10} = -1.5$$

$P(X<485)=P(Z<-1.5) = \Phi(-1.5)=0.0668$

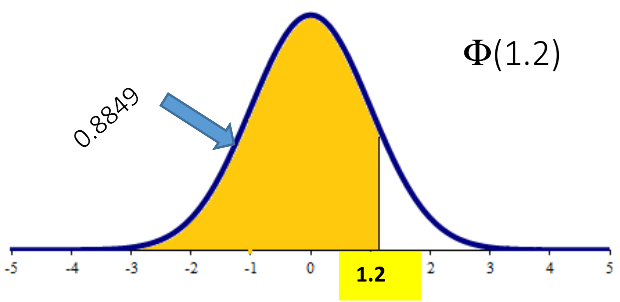


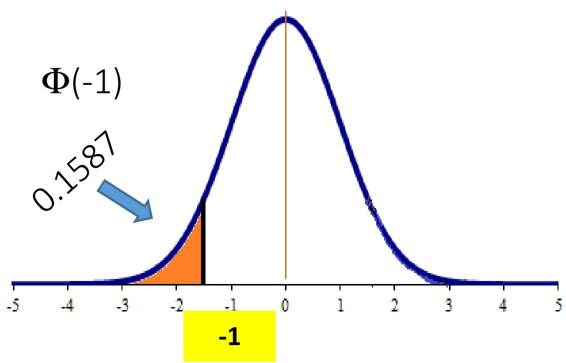
2. probabilità che il punteggio sia compreso fra 490 e 512.

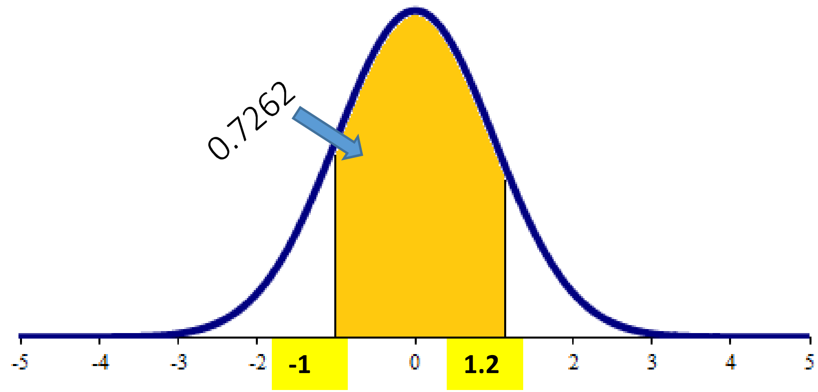
$X \sim N(500,100).$

$$z_a = \frac{x_a - \mu}{\sigma} = \frac{490 - 500}{10} = -1$$

$$z_b = \frac{x_b - \mu}{\sigma} = \frac{512 - 500}{10} = 1.2$$




$P(490<X<492)=P(-1<Z<-1.2) =$

$= \Phi(1.2) - \Phi(-1) = 0.8849 - 0.1587 = 0.7262$

# Esempio

Consideriamo il punteggio ad un test. Sul manuale del test è indicato che i punteggi del campione normativo si distribuiscono normalmente con media **$\mu$ = 50** e deviazione standard **s = 10.**

***Se somministriamo il test ad un bambino scelto a caso, qual è la probabilità che il suo punteggio sia superiore a 70?***

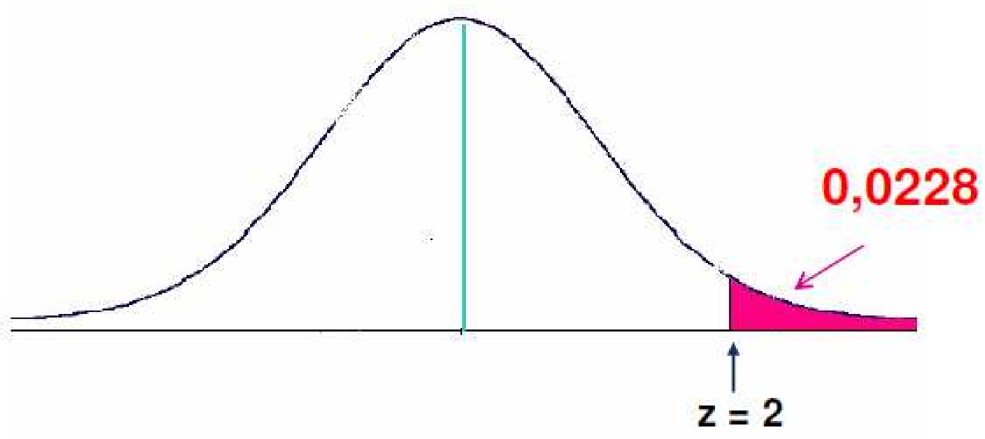
Standardizziamo il punteggio X = 70

standardizzazione

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow \boxed{z = (70-50)/10 = 2}$$

# Esempio

L'area che corrisponde alla probabilità che ci interessa è quella evidenziata in rosa (l'area alla destra di z = 2).




Dalle tavole della curva normale standardizzata ricaviamo che l'area alla destra di z = 2 corrisponde ad una proporzione di 0,0228 di tutta la curva, cioè il 2,28%.

Quindi <u>la probabilità che un bambino scelto a caso ottenga un punteggio superiore a 70 è del 2,28%.</u>

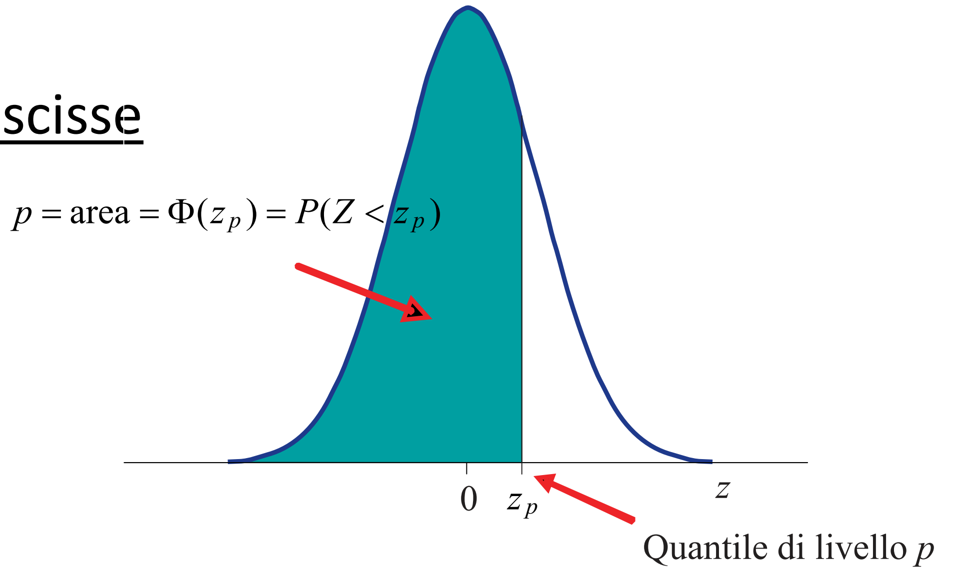
La probabilità è bassa, perché abbiamo considerato un punteggio lontano dalla media (50).

# Problema inverso: individuazione dei quantili

- Il **problema inverso** consiste nella determinazione del valore di X a cui corrisponde un livello assegnato, *p*, della funzione di ripartizione (cioè dell'area sottesa alla curva a sinistra di *x*).

1. Si procede calcolando prima il valore di Z tale che $P(Z < z) = \Phi(z) = p.$

Si tratta di <u>trovare il punto sull'asse delle ascisse</u> tale che l'area sottesa alla curva fino a quel punto sia pari al valore assegnato *p.*



# Dai quantili della N(0,1) ai quantili della N($\mu$,$\sigma^2$)

2. Poi dal quantile di Z si ottiene il valore di X sulla base delle relazioni

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}\,;\; x = \mu + z\sigma.$$

In pratica la determinazione dei quantili di una v.c. N($\mu$, $\sigma^2$) si effettua in due fasi:

1. si determina, prima, il quantile per la v.c. N(0, 1),
2. si ricava, poi, il quantile voluto, riferito, cioè, alla v.c. N($\mu$, $\sigma^2$) utilizzando la seconda delle due equazioni precedenti.

# Esempio

Lo Scholastic Aptitude Test (SAT) è un test attitudinale richiesto per l'ammissione ai college degli Stati Uniti. I punteggi SAT si distribuiscono normalmente con media 1000 e varianza 17.5. N(1000,17.5)

Vogliamo determinare il quantile di livello p=0.90.

Fase 1

- Calcoliamo il quantile di livello 0.90 per la normale standardizzata, ottenendo

$$Z_{0.90} \approx \Phi^{-1}(0.8997) = 1.28.$$

Fase 2

- Applichiamo la formula $x = \mu + z\sigma.$

$$x_{0.90} = 1000 + 1.28\sqrt{17.5} = 1005.36.$$

# Altre Tavole della distribuzione Normale Standardizzata

E' cioè possibile costruire una tavola che riporta le aree sottese alla curva in corrispondenza di diversi valori di z

In questa tavola viene riportata l'area compresa tra 0 e un punto z collocato a destra dell'origine

**Esempio:**

L'area sottesa dalla N(0, 1) nell'intervallo [0, 1.24] è pari a: 0,3925

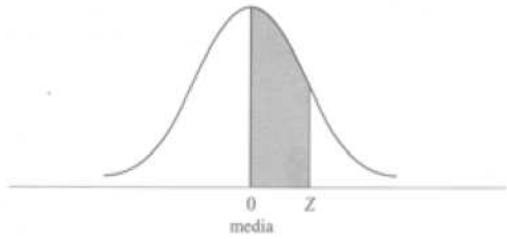



Tavola A.1 La distribuzione normale.

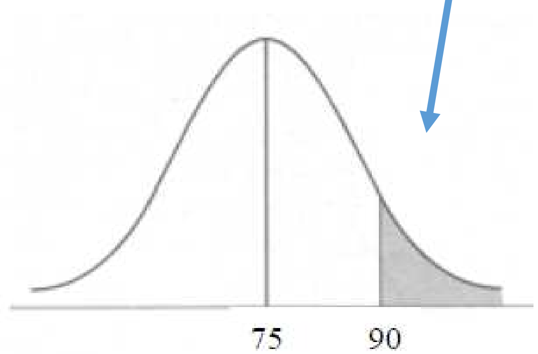
| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4022 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |

# Esempio

La velocità delle auto rilevata dall'autovelox sulla tangenziale est si distribuisce normalmente con media=75 km/h e scarto quadratico medio=8 km/h.

Che percentuale di auto superano il limite di velocità di 70 km/h ?

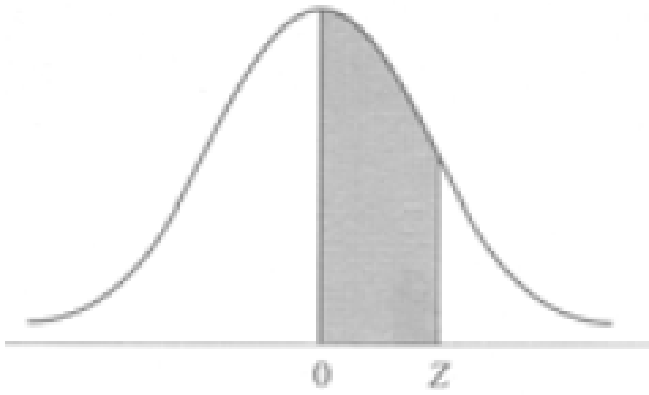
A quanti automobilisti su 100 viene ritirata la patente (oltre 90 km/h) ?


Per prima cosa disegniamo le aree che rispondono alle domande che ci vengono poste

# Esempio

Supponiamo di avere a disposizione la tavola della Normale che riporta l'area compresa nell'intervallo [0, z], e pensiamo a come conviene procedere.




Per rispondere alla prima domanda, considerato che l'area a destra della media è ben nota (= 0,5), dobbiamo solo calcolare l'area compresa tra 70 e 75.

Il primo passo è calcolare il valore z standardizzato corrispondente a 70 km/h:

$z = (70 – 75) / 8 = -0.625$

# Esempio

Osserviamo che l'area compresa nell'intervallo [-0.625 , 0], per la simmetria della Normale, è uguale a quella dell'intervallo [0 , 0.625]

Cerchiamo 0.625 sulla tavola: vediamo che non troviamo il valore esatto, dobbiamo quindi interpolare i due valori più prossimi:
(0.2324 + 0.2357) / 2 = 0.2341

A questo punto dobbiamo solo ricordarci di aggiungere l'area a destra del valore medio:
0.2341 + 0.5 = 0.7341

Arriviamo quindi **alla conclusione che il 73,41% degli autoveicoli in transito superano il limite di velocità.**

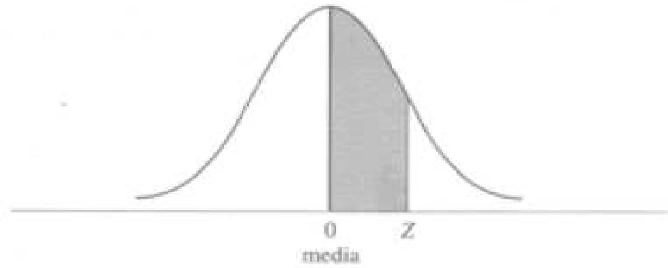
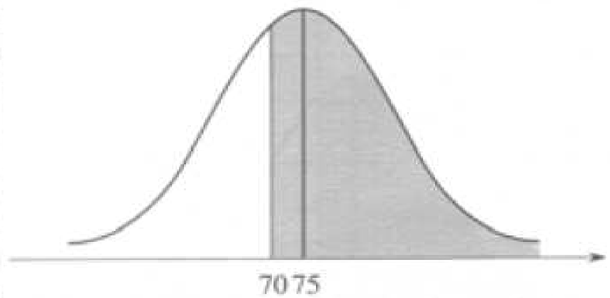


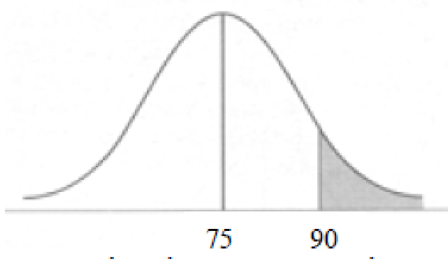

Tavola A.1 La distribuzione normale.

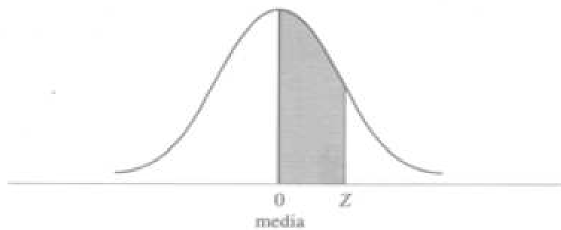
| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | [illegible] | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | [illegible] | [illegible] | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | | | | | | |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | | | | | | |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | | | | | | |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | | | | | | |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | | | | | | |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | | | | | | |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4022 | 0,4925 | | | | | | |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | | | | | | |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | | | | | | |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | | | | | | |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | | | | | | |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | | | | | | |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | | | | | | |



# Esempio

Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo calcolare l'area a destra di 90 km/h




Dunque calcoliamo il valore z standardizzato corrispondente a 90 km/h: z = (90 – 75) / 8 = 1.88

Osserviamo che l'area a destra di z=1.88 è uguale a 0,5 meno l'area dell'intervallo [0, 1.88], fornita dalla nostra tavola

Cerchiamo 1,88 sulla tavola e troviamo l'area: 0.4699

L'area che ci interessa è quindi uguale a:

0.5 – 0.4699 = **0.0301**

Posiamo quindi concludere che viene **ritirata la patente al 3% degli automobilisti in transito**

**Tavola A.1** La distribuzione normale.

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | [illegible] | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | [illegible] | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4022 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | 0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |