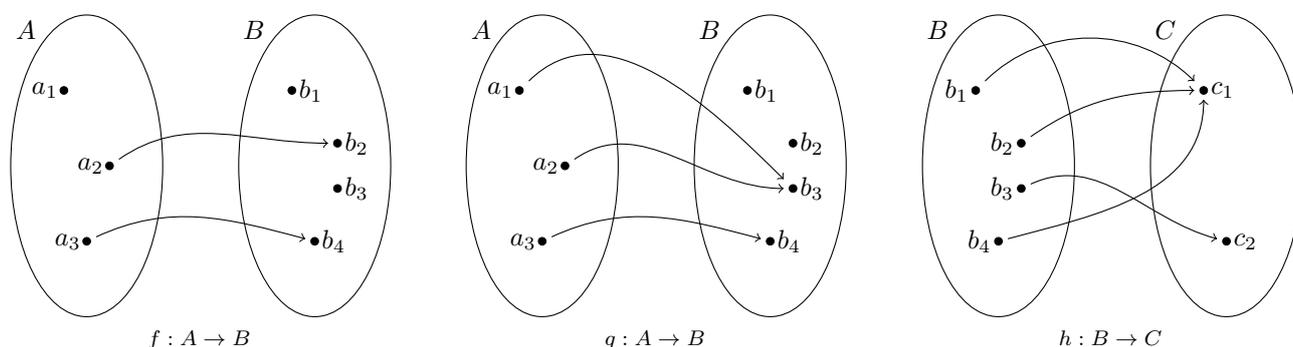


## Matematica generale: esonero dell'8 novembre 2011

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato *insufficiente*.

1. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  come nella figura che segue:



- Dire quali tra  $f$ ,  $g$  e  $h$  non sono funzioni, e perché.
- Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
- Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
- Si può fare la composizione  $h \circ g$  tra  $g$  ed  $h$ ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.

2. Risolvere la disequazione fratta  $\frac{x^2 - 6x + 7}{x - 4} - 2 \leq 0$ .

3. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  definite come segue:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 6x + 7}{x - 4} - 2\right), \quad g(x) = \ln(6(\sqrt{x})^2 + 3), \quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \ln(6x + 3) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Determinare il dominio di  $f$ ,  $g$  e  $h$ .
- Determinare l'immagine di  $g$ .
- Dire se esiste l'inversa di  $g$ , e se si calcolarla.
- Dire se si può fare la composizione  $f \circ g$ , e se si calcolarla.
- Dire se ha senso, e se si calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x).$$

- Dire se  $h$  è una funzione continua. Se non lo è, dire per quali valori di  $x$  non è continua e perché.
- [*opzionale*] Se nella definizione di  $h$  sostituiamo  $x \leq 0$  con  $x < 0$ ,  $h$  è continua?

4. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.

5. Dire, giustificando la risposta, se la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

converge. Se sì, calcolarne la somma.