

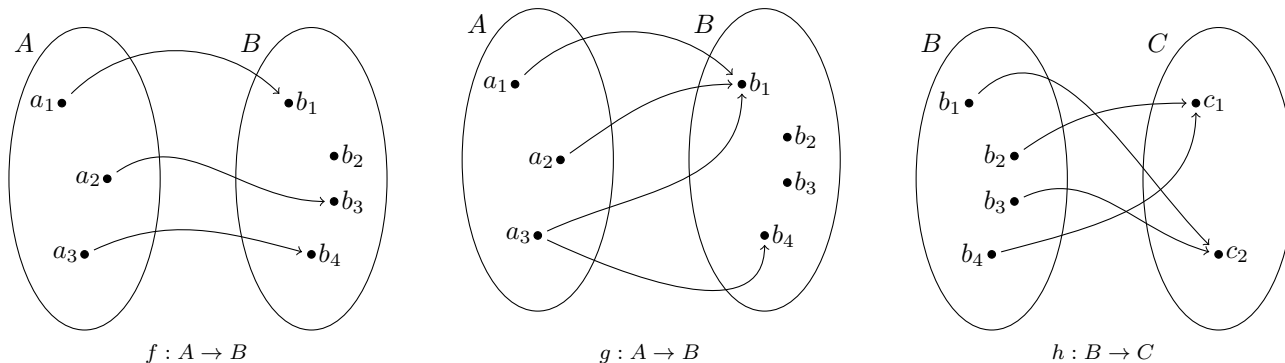
Matematica generale: compito del 19 dicembre 2012

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiedi al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Siano f , g e h come nella figura che segue:



- Dire quali tra f , g e h non sono funzioni, e perché.
- Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
- Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
- Si può fare la composizione $h \circ f$ tra f ed h ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2-x} - \frac{3x}{2x+1} \geq -1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\frac{1}{2x}\right) & \text{se } x > 0, \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

determinarne

- il dominio;
 - il segno;
 - gli eventuali asintoti;
 - i punti in cui f è continua e i punti in cui f non è continua;
 - gli intervalli di crescita e decrescenza;
 - i punti in cui f è derivabile e i punti in cui f non è derivabile;
 - eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
 - gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
 - il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 3 e dall'asse delle x , in corrispondenza dell'intervallo $(1, e)$.
5. Calcolare l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2-1})^3} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{3n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{n^2-1}}{e^{3-2n^2}}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- calcolare il determinante $\det(A)$ di A ;
- risolvere il sistema $A \cdot X = B$;
- calcolare la traccia $\text{tr}(A)$ di A .

Matematica generale: compito del 19 dicembre 2012

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiedi al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 4 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x+2) \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |3x-2| \leq 4\}, \quad C = I(-1, 4), \quad D = \{n \in \mathbb{N} : n-3 \leq 0\}.$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se $C \subseteq A$ e se $B \subseteq C$.
- (b) Determinare $A \cup B$ e $C \cup D$.
- (c) Determinare $A \cap B$ e $C \cap D$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{3-x}{2-x} - \frac{x-1}{2x+1} \leq 1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{2x^2+1} - 1 & \text{se } x \geq -1, \\ e^{-x} & \text{se } x < -1, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;
 - (b) il segno;
 - (c) gli eventuali asintoti;
 - (d) i punti in cui f è continua e i punti in cui f non è continua;
 - (e) gli intervalli di crescita e decrescenza;
 - (f) i punti in cui f è derivabile e i punti in cui f non è derivabile;
 - (g) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
 - (h) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
 - (i) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 3 e dall'asse delle x , in corrispondenza dell'intervallo $(0, 1)$.
5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x(1 - \ln(x)) dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{1+2n^2}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{2n}}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) calcolare il rango $\text{rk}(A)$ di A ;
- (b) risolvere il sistema $A \cdot X = B$;
- (c) dire se A è simmetrica.