Esercizi di Geometria
C.d.L. Ingegneria Biomedica
a.a. 2012/13

Calcolo matriciale

1) Calcolare tutti i prodotti riga per colonna eseguibili fra le seguenti matrici: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Date le matrici del punto precedente, determinare $3B - {}^tD^tE + B^2$. Che tipo di matrice si ottiene? Se ne puó calcolare il determinante?

3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinare l'inversa delle matrici che risultano invertibili.

4) Stabilire il rango delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Determinare una matrice triangolare superiore ed una matrice triangolare inferiore che abbiano lo stesso determinante della matrice

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) Determinare la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soluzioni

1)$AD = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -22 & 13 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$, $BE = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 1 & -12 & -7 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} 18 & 17 \end{pmatrix}$, $DB = \begin{pmatrix} 20 & -9 \\ -22 & -9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $EA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 19 & 7 \end{pmatrix}$, $ED = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -15 & 8 \end{pmatrix}$.

2) Si ottiene una matrice quadrata di ordine 2 con determinante -132.

3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici e stabilirne l'invertibilitá.
$det(A) = 0$, $det(B) = 12$, $det(C) = -65$, $det(D) = -81$, $det(E) = 0$ (l'ultima colonna é la somma delle precedenti), $det(F) = 0$ (una riga é nulla), $det(G) = 0$ (le prime due righe sono proporzionali). le sole matrici invertibili sono quindi B, C e D.
$B^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 7 & 31 & 2 \\ 14 & -3 & 4 \\ -8 & 11 & 7 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \ldots$

4) $\nu(A) = 2$, $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.
$\nu(B) = 1$. Ogni vettore riga e ogni vettore colonna forma un insieme linearmente indipendente.
$\nu(C) = 3$. $\{(1,-4,4,0,1,3),(-1,4,-3,-1,0,-2),(0,0,1,-1,1,1)\}$ e $\{(1,-1,0,3),(-4,4,0,0),(4,-3,1,-1)\}$ sono insiemi di vettori linearmente indipendenti.

5) una matrice diagonale (e quindi sia triangolare superiore che inferiore) avente lo stesso determinante di A é $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -\frac{15}{2} & 7 \end{pmatrix}$.