Esercizi di Geometria
C.d.L. Design
a.a. 2016/17

Geometria dello spazio

1) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le due rette

$$r \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = 2. \end{cases}$$

e il piano $\pi : x - 3y + z = 2$.
a) Trovare un vettore direttore $\bar{v}$ di r e un vettore direttore $\bar{u}$ di s.
b) Trovare un vettore $\bar{h}$ ortogonale a r e un vettore $\bar{l}$ ortogonale a s.
c) Stabilire la posizione reciproca di r e s.
d) Calcolare la distanza tra il punto $P = (1, 0, 0)$ e il piano π.
e) Trovare l'equazione del piano σ passante per P e perpendicolare a s.
f) Calcolare la distanza tra il punto P e la retta s.
g) Scrivere le equazioni della retta t passante per $P \equiv (1, 0, 0)$ e parallela a r.

Soluzione. (a) $\bar{v} = (2, -1, 3)$, $\bar{u} = (-2, 2, 1)$. (b) $\bar{h} = (x, y, z)$ tale che $(x, y, z)\dot{(}2, -1, 3) = 0$; per esempio $\bar{h} = (1, 2, 0)$. Allo stesso modo si trova $\bar{l} = (1, 1, 0)$. (c) rette sghembe. (d) $d = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. (e) $\sigma :\ -2x + 2y + z + 2 = 0$. (f) $d(P, s) = d(P, H)$, dove $H = \sigma \cap s$; $H = (-\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9})$, $d(P, s) = \frac{\sqrt{38}}{3}$.
(g) $t) \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$.

2) Nello spazio euclideo E_3 si considerino i punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 0, -1)$ e la retta $r)\, x + 2 = y = z - 1$.
a) Scrivere l'equazione del piano α passante per A e per B e parallelo ad r.
b) Scrivere l'equazione del piano β contenente r e parallelo ai $\pi_1)\, x + y + 3 = 0$.

Soluzione. (a) $x - y = 1$. (b) $3x - 2y - z + 7 = 0$.

3) È data, nello spazio euclideo E_3, la retta s passante per il punto $A = (-1, 3, 0)$ ed avente vettore direttore $(1, 2, 2)$.
a) Stabilire la mutua posizione tra s e la retta

$$r : \begin{cases} 2x - 2y + z + 7 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

b) Determinare l'equazione del piano π contenente r e s.
c) Trovare l'equazione del piano σ ortogonale a s e passante per l'origine del sistema di riferimento.
d) Determinare l'equazione della retta t parallela a r e passante per $B = (1, 0, 0)$.

Soluzione. (a) rette parallele e distinte. (b) Determiniamo due punti su una delle rette, ad esempio s: $A = (-1, 3, 0)$ (già a disposizione), $B = (0, 5, 2)$ e uno su r: $C = (0, -2, -11)$. Il piano π cercato passa per A, B e C. π : $\begin{cases} x = -1 + \lambda + 2\mu \\ y = 3 + 2\lambda + 5\mu \\ z = 2\lambda - 11\mu \end{cases}$. (c) $x + 2y + 2z = 0$; (d) $t : \begin{cases} 2x - 2y + z + 5 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

8) Nello spazio euclideo reale 3-dimensionale E_3 si considerino i punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$ e le rette

$$r) \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s) \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = -s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

a) Determinare la posizione reciproca fra r e s e dire se esiste un piano che contiene le due rette.
b) Dire se il punto P appartiene alla retta r.
c) Calcolare la distanza fra P e s.
d) Trovare il piano α contenente P e s.
e) Calcolare le componenti del vettore $\bar{PQ}$ e la sua norma.

Soluzione. (a) rette sghembe; quindi non esiste un piano che le contiene. (b) $P \notin r$. (c) $d(P, s) = d(P, H)$, dove $H = \sigma \cap s$ e σ è il piano passante per P e perpendicolare a s. Un vettore direttore di s è $\bar{u} = (2, -1, -2)$, quindi il piano σ è $2x - y - 2z - 2 = 0$. Dunque $H = \sigma \cap s = (2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e perciò $d(P, s) = d(P, H) = \frac{\sqrt{29}}{3}$. (e) α è il piano che contiene P e due qualsiasi punti di s, ad esempio $A = (-1, 0, 1)$ e $B = (1, -1, -1)$. Dunque $\alpha = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$ e in equazione cartesiana $\alpha : x - 2y + 2z = 1$. (e) $\bar{PQ} = (-1, 1, 0)$, $||\bar{PQ} = \sqrt{2}$.

9) Studiare la mutua posizione della retta

$$r(\lambda)\begin{cases} 6x+3y+4z=4 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$$

e del piano π di equazione $x+2y+2z=1$ dello spazio euclideo E^3.
Inoltre determinare
a) il piano contenente r e ortogonale a π;
b) il piano contenente r e parallelo a π.

Soluzione. La retta e il piano sono paralleli e disgiunti. (a) $34x-13y-4z+24=0$. (b) $x+2y+2z-3=0$.

10) Nello spazio euclideo E_3 si considerino il punto $P \equiv (1,0,1)$, la retta r di equazioni $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$ e il piano $\pi)\ 2x+y-z+2=0$.
a) Trovare il piano α contenente P, parallelo alla retta r e perpendicolare a π.
b) Trovare la retta $t=\pi\cap\alpha$.
c) Verificare che le rette r e t sono sghembe.

Soluzione. a) Un vettore direttore di r è $\bar{u}=(0,1,-1)$. Un vettore perpendicolare a π è $\bar{v}=(2,1,-1)$. Il vettore (a,b,c) del piano α cercato deve essere ortogonale a $\bar{u}$ e a $\bar{v}$. Si ha così: $\alpha)\ y+z-1=0$. (b) $t)\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$. (c) Le due rette non hanno intersezione e i loro vettori direttori non sono paralleli, dunque esse sono sghembe.

11) Nello spazio euclideo E_3 si considerino le rette

$$r:\begin{cases} x-z=2 \\ y-2z=5 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x-y-z=2 \\ 5x-2y-z=1 \end{cases}$$

e il piano $\alpha:\ x-y+2z=1$.
a) Stabilire la posizione reciproca di r e s.
b) Trovare, se esiste, il piano che le contiene entrambe.
c) Determinare la distanza fra r e s.

Soluzione. (a) rette parallele e distinte. (b) $2x-y+1=0$. (c) $d=\sqrt{(30)}/6$

15) Nello spazio euclideo E_3 si determini la distanza del punto $P=(0,1,0)$ dalla retta

$$r:\begin{cases} x=3\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R} \quad .$$

Soluzione. $d = \frac{3\sqrt{6}}{5}$.