Esercizi di Geometria
C.d.L. Design
a.a. 2016/17

Curve

1) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\gamma = \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^3 - 3t \\ z = (t-1)^2 \end{cases}$.

Determinare:
a) la classificazione dei punti di Γ;
b) il triedro di Frenet nel punto $P = \gamma(0)$;
c) retta tangente t e piano normale π nel punto P;
d) curvatura K e torsione τ nel punto P;
e) se Γ è contenuta in un piano.

Soluzione. (a) $A = \gamma(1) = (-1, -2, 0)$ è l'unico punto singolare. Non ci sono punti di flesso. Tutti i punti di Γ diversi da A sono stazionari. (b) $\mathbf{t} = (\frac{\mathbf{-2}}{\sqrt{\mathbf{17}}}, (\frac{\mathbf{-3}}{\sqrt{\mathbf{17}}}, (\frac{\mathbf{-2}}{\sqrt{\mathbf{17}}})$, $\mathbf{b} = (-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}})$, $\mathbf{n} = (-\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{34}}}, (-\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{34}}}, -\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{34}}})$. (c) $tg_\Gamma(P) : \begin{cases} x = 0 - 2\lambda \\ y = 0 - 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$; $\pi_n(P) : 2x + 3y + 2z - 2 = 0$. (d) $K(1) = \sqrt{\frac{72}{4913}}$; $\tau(1) = 0$. (e) Γ è contenuta in un piano perchè ha torsione ovunque nulla.

2) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\gamma = \begin{cases} x = t^4 + t^2 \\ y = 2t^3 \\ z = -t^3 + t^2 - 1 \end{cases}$.

Determinare:
a) i punti stazionari e i punti di flesso di Γ;
b) il versore tangente nel punto $P = \gamma(1)$;
c) retta tangente t e piano normale π nel punto P;
d) la curvatura K nel punto P;

Soluzione. (a) $A = \gamma(0) = (0, 0, -1)$ è l'unico punto singolare. Non ci sono punti di flesso. (b) $\mathbf{t} = (\frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{73}}}, \frac{\mathbf{6}}{\sqrt{\mathbf{73}}}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{73}}})$. (c) $tg_\Gamma(P) : \begin{cases} x = 2 + 6\lambda \\ y = 2 + 6\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$; $\pi_n(P) : 6(x-2) + 6(-y2)y - (z+1) = 0$. (d) $K(1) = \sqrt{\frac{1204}{389017}}$.

3) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\gamma = \begin{cases} x = e^t - t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$. Determinare:
a) la classificazione dei punti di Γ;
b) il triedro di Frenet nel punto $P = \gamma(1)$;
c) retta tangente t e piano normale π nel punto P;
d) curvatura K e torsione τ nel punto P;
e) se Γ è contenuta in un piano.

Soluzione. ((a) $A = \gamma(0) = (1, 0, 0)$ è l'unico punto singolare. Non ci sono punti di flesso. Tutti i punti di Γ diversi da A sono stazionari. (b) $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{(\mathbf{e-1})^2+\mathbf{4}}}(\mathbf{e-1, 2, 0})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{0, 0, 1})$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{(\mathbf{e-1})^2+\mathbf{4}}}(\mathbf{-2, e-1, 0})$. (c) $tg_\Gamma(P) : \begin{cases} x = (e-1) + \lambda(e-1) \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$; $\pi_n(P) : (e-1)(x-e+1)+2(y-1) = 0$. (d) $K(1) = \frac{4}{\sqrt{(e-1)^2+4}}$; $\tau(1) = 0$. (e) Γ è contenuta in un piano perchè ha torsione ovunque nulla o, equivalentemente, perchè la sua rappresentazione parametrica γ ha una componente nulla.

4) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\gamma = \begin{cases} x = cos(t) \\ y = sen(t) \\ z = t \end{cases}$. Determinare:
a) la classificazione dei punti di Γ;
b) il triedro di Frenet nel generico punto $P = \gamma(t)$;
c) retta tangente t e piano normale π nel punto $Q = \gamma(0)$;
d) curvatura K e torsione τ nel generico punto P;
e) se Γ è contenuta in un piano.

Soluzione. (a) Tutti i punti di Γ sono regoari. Non ci sono punti di flesso e non ci sono punti stazionari. (b) $\mathbf{t} = (-\frac{\mathbf{sen(t)}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{cos(t)}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}})$, $\mathbf{b} = (\frac{\mathbf{sen(t)}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, -\frac{\mathbf{cos(t)}}{\sqrt{\mathbf{2}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}})$, $\mathbf{n} = (-\mathbf{cos(t)}, -\mathbf{sen(t)}, \mathbf{0})$. (c) $tg_\Gamma(P) : \begin{cases} x = 1 - \lambda(sen(t)) \\ y = \lambda(cos(t)) \\ z = \lambda \end{cases}$; $\pi_n(P) : -sen(t)(x-1) + cos(t)y + z = 0$. (d) $K(t) = \frac{1}{2}$; $\tau(t) = \frac{1}{2}$. (e) Γ non è contenuta in un piano perchè non ha torsione ovunque nulla.

5) Sia Γ la curva di rappresentazione parametrica $\gamma = \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \\ z = t^4 \end{cases}$. Determinare:

a) la classificazione dei punti di Γ;
b) il versore tangente nel punto $P = \gamma(1)$;
c) retta tangente t e piano normale π nel punto P;
d) curvatura K e torsione τ nel punto P;
e) se Γ è contenuta in un piano.

Soluzione. (a) Tutti i punti di Γ sono regoari. Non ci sono punti di flesso. $\gamma(0)$ è l'unico punto stazionario.. (b) $\mathbf{t} = (\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}, \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}})$. (c) $tg_\Gamma(P)$: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$; $\pi_n(P) : (x-1) + (y-2) + 2(z-1) = 0$. (d) $K(1) = 5\sqrt{\frac{53}{5}}$; $\tau(1) = -\frac{96}{53}$. (e) Γ non è contenuta in un piano perchè non ha torsione ovunque nulla.