PROVA SCRITTA 11/1/2018

① $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

matrice completa $C = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

ⓐ

$rg(A) = 2 = rg(C)$

poiché

$rg(A) \underset{R_2 - \frac{3}{2}R_1}{\longrightarrow} rg \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2$ (2 pivot non nulli)

e

$rg(A) \leq rg(C) \leq 2$, quindi $rg(C) = 2$

ⓑ

Per il teorema di Rouché - Capelli, il sistema è possibile perché $rg(A) = rg(C)$ ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzione

n° incognite

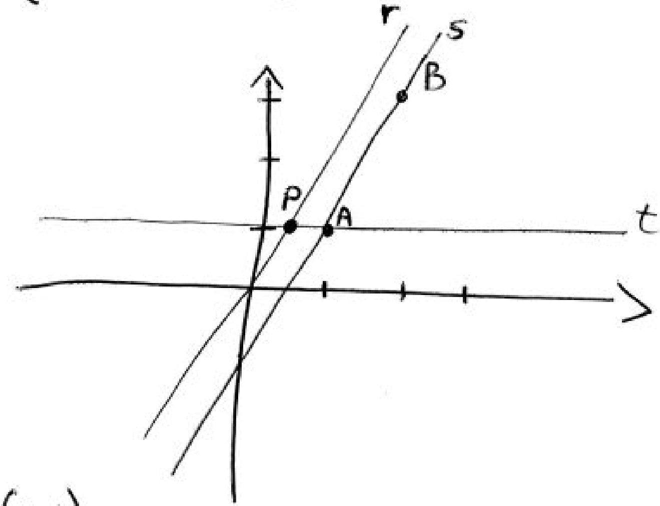
$rgA = rgC$

ⓒ Ad esempio $C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice 3x2 di rango 2

ⓓ

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $rgE = 2$ perché $\det E \neq 0$

②



$A = (1,1)$

$B = (2,3)$

ⓐ $s: A, B \in s$

$s) \begin{cases} x = 1 + (2-1)\lambda \\ y = 1 + (3-1)\lambda \end{cases}$

$s) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$ eq. param.

$\lambda = x - 1$

$y = 1 + 2(x-1)$

$s)$ $2x - y - 1 = 0$ eq. cartes

(posso verificare che A e B appartengono a s:

$2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$ ✓ A

$2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$ ✓ B

(b) $t: A \in t,\ B \notin t$

$t: y = 1$ eq. cartes. $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \end{cases}$ eq. param.

(c) $r: r /\!/ s,\ O \in r$

$r)\ 2x - y + c = 0$

$O \in r)\ 2 \cdot 0 - 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$

$r)\ 2x - y = 0$ eq. cartes.

(d) $d(B, r) = \dfrac{|2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(e) $r \cap t \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \quad P = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(3)

$\Gamma = [\gamma] \quad \gamma \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 1 - t^2 \\ z = t^2 - 1 \end{cases}$

(a) punti singolari: $\boxed{\gamma'(t) = 0}$

$\gamma'(t) \begin{cases} x' = 2t \\ y' = -2t \\ z' = 2t \end{cases} \qquad \gamma'(t) = 0 \begin{cases} 2t = 0 \\ -2t = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \rightarrow t = 0$ è l'unica soluzione del sistema

→ Esiste un unico punto singolare:

$B = \gamma(0) = (-1, 1, -1)$

punti di flesso: $\boxed{\text{punti non singolari, tali che } \gamma'(t) = k\gamma''(t) \text{ per qualche } k}$

$t \neq 0$ (perché per $t = 0$ abbiamo ottenuto un punto sing.)

$\gamma''(t) = \begin{cases} x'' = 2 \\ y'' = -2 \\ z'' = 2 \end{cases} \qquad \gamma'(t) = k\gamma''(t) \begin{cases} \cancel{2}t = \cancel{2}k \\ -\cancel{2}t = -\cancel{2}k \\ \cancel{2}t = \cancel{2}k \end{cases} \rightarrow t = k$

→ Per ogni $t \neq 0$, $\gamma(t)$ è un punto di flesso

punti stazionari: $\boxed{\text{punti non singolari e non di flesso tali che } \det\begin{pmatrix} \gamma'(t) & \gamma''(t) & \gamma'''(t) \end{pmatrix} = 0}$

→ Non ci sono punti stazionari, perché tutti i punti di Γ

sono singolari o di flesso.

(b) $P = \gamma(2) = \begin{cases} x = 2^2-1 = 3 \\ y = 1-2^2 = -3 \\ z = 2^2-1 = 3 \end{cases}$ $P = \gamma(2) = (3,-3,3)$

$\gamma'(2) = \begin{cases} x' = 2\cdot 2 \\ y' = -2\cdot 2 \\ z' = 2\cdot 2 \end{cases}$ $\gamma'(2) = (4,-4,4)$

(c) versore tangente in $P=\gamma(2)$

$t(2) = \frac{\gamma'(2)}{\|\gamma'(2)\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{48}}, \frac{-4}{\sqrt{48}}, \frac{4}{\sqrt{48}}\right) = \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{3}}, \frac{-\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{3}}, \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{3}}\right)$

$\|\gamma'(2)\| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(4)^2} = \sqrt{48}$

$t(2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(d) un versore ortogonale a $t(2)$

$\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ tale che $\bar{u} \cdot \bar{t}(2) = 0$

$\bar{u} \cdot t(2) = (u_x, u_y, u_z) \cdot (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{3}} u_x - \frac{1}{\sqrt{3}} u_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_z = 0$

$\frac{1}{\sqrt{3}} (u_x - u_y + u_z) = 0 \rightarrow u_x - u_y + u_z = 0$

$\boxed{u_y = u_x + u_z}$

Un versore ortogonale a $t(2)$ è

$\bar{u} = (1,2,1)$

(e) $tg(P) \begin{cases} x = x_P + x'_P \lambda \\ y = y_P + y'_P \lambda \\ z = z_P + z'_P \lambda \end{cases}$ $tg(P) \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases}$

④ $r \begin{cases} z = 1+x \\ y = -1+x \end{cases}$ $A=(5,-3,0)$ $\bar{u}=(1,1,1)$ $\bar{v}=(-1,2,1)$

ⓐ $r \begin{cases} x = t \\ y = -1+t \\ z = 1+t \end{cases} \rightarrow$ vettore direttore di r : $(1,1,1)=\bar{u}$ ✓

ⓑ $\bar{u}\cdot\bar{v} = (1,1,1)\cdot(-1,2,1) = 1(-1)+1\cdot 2+1\cdot 1 = 2$

ⓒ $A \in r?$ $\begin{cases} 0 \overset{?}{=} 1+5 \end{cases}$ NO $\rightarrow A \notin r$

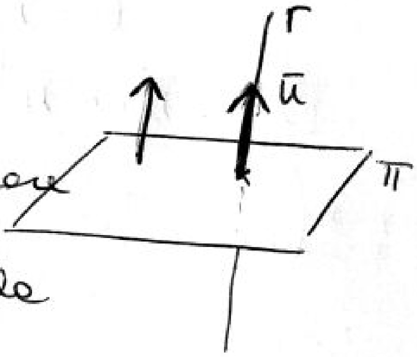
ⓓ s: $P=(1,1,1)\in s$, $s \parallel r$

il vettore direttore ~~di s~~ è uguale a quello di r

$s \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

ⓔ π : $A\in\pi$, $\pi \perp r$

il vettore perpendicolare al piano è il vettore direttore della retta



$\pi)$ $1(x-5)+1(y+3)+1(z-0)=0$

$x+y+z-2=0$