Approfondimenti di logica

Gianluca Amato

11 gennaio 2021

1 Verifica di equivalenze logiche

In questa sezione vediamo come utilizzare le tautologie notevoli che abbiamo studiato per dimostrare l'equivalenza logica di due f.p. in maniera algebrica, senza utilizzare né tabelle di verità né il metodo indiretto visto nella sezione 3.3 del libro di testo.

Ricordiamo cosa vuol dire che due f.p. sono equivalenti:

Definizione 1. Due f.p. X ed Y si dicono *equivalenti* quando hanno lo stesso valore di verità in corrispondenza di ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che compaiono in esse.

Indicheremo in maniera compatta il fatto che X ed Y sono equivalenti con $X \equiv Y$. Ad esempio, $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Attenzione al fatto che $\equiv$ non è un connettivo ed $A \wedge B \equiv B \wedge A$ non è una formula, è solo un modo compatto di scrivere "$A \wedge B$ è equivalente a $B \wedge A$".

Consideriamo adesso la f.p. $X = (B \wedge A) \wedge B$. La formula $B \wedge A$ di X è equivalente a $A \wedge B$ per la proprietà commutativa della congiunzione. Se rimpiazziamo in X la formula $B \wedge A$ con $A \wedge B$, otteniamo una f.p. equivalente:

$$(B \wedge A) \wedge B \equiv (A \wedge B) \wedge B \ .$$

A questo punto, applicando la proprietà associativa della congiunzione e la proprietà di idempotenza, otteniamo

$$(A \wedge B) \wedge B \equiv A \wedge (B \wedge B) \equiv A \wedge B \ .$$

Siamo così riusciti a semplificare la f.p. X ottenendo una nuova f.p. $(A \wedge B)$ ad essa equivalente. Possiamo generalizzare quanto fatto in questo esempio nel seguente teorema.

Teorema 1. *Sia X una f.p. ed Y un'altra f.p. contenuta in X. Se Y è equivalente a Z, possiamo rimpiazzare la Y con Z in X e la f.p. che otteniamo è equivalente ad X.*

Sfruttando questo teorema e le equivalenze note, è spesso possibile semplificare una f.p. in una equivalente più semplice. Illustriamo il procedimento con un paio di esempi.

Esempio 1. Semplificare le seguenti f.p.:

1. $\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$
2. $\neg(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Svolgimento. Per il punto 1, si ha:

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di De Morgan]} \\
&(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge della doppia negazione]} \\
&(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di idempotenza]} \\
&A \wedge \neg B
\end{aligned}$$

Per il punto 2, si ha

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di De Morgan]} \\
&(\neg\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge della doppia negazione]} \\
&(A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[prop. distributiva]} \\
&(A \vee \neg B \vee A) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[prop. associativa, commutativa e idempotenza]} \\
&(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[idempotenza]} \\
&A \vee \neg B
\end{aligned}$$

□

Due tautologie notevoli che spesso è necessario utilizzare in queste semplificazioni, ma che non sono presenti sul libro di testo, sono le **leggi di assorbimento**:

$$(A \wedge B) \vee A \leftrightarrow A \qquad (A \vee B) \wedge A \leftrightarrow A$$

Inoltre, è molto importante anche il seguente seguente teorema (di immediata verifica).

Teorema 2. *Se X è una tautologia, $A \wedge X \equiv A$ ed $A \vee X$ è una tautologia. Se X è una contraddizione, $A \wedge X$ è una contraddizione e $A \vee X \equiv A$.*

Durante le operazioni di semplificazione di f.p., utilizzeremo V per indicare una qualunque tautologia ed F per indicare una qualunque contraddizione.

Esempio 2. Semplificare la seguente f.p.

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

Svolgimento.

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv$

[prop. distributiva per mettere in evidenza la A]

$A \wedge (B \vee \neg B) \equiv$

[legge del terzo escluso]

$A \wedge V \equiv$

[legge della tautologia]

A $\square$

2 Basi di connettivi

In questa sezione vediamo più in dettaglio il concetto di *base di connettivi*, che comunque è stato già introdotto nel libro di testo nella sezione 2.2. Iniziamo con una definizione.

Definizione 2 (Base di connettivi)**.** Un insieme $\mathcal{B}$ di connettivi si dice essere una *base di connettivi* se per qualunque forma proposizionale X esiste una forma proposizionale equivalente Y che usa solo i connettivi in $\mathcal{B}$. In alternativa, possiamo anche dire che i connettivi in $\mathcal{B}$ sono *funzionalmente completi.*

Il procedimento illustrato nella sezione 2.2 ci consente di determinare, data una f.p., un'altra f.p. ad essa equivalente che utilizza solo i connettivi $\vee$, $\wedge$ e $\neg$. Questo ci consente di affermare che l'insieme $\{\vee, \wedge, \neg\}$ costituisce una base di connettivi.

In realtà, dalla legge di De Morgan, sappiamo che una f.p. del tipo $X \wedge Y$ è equivalente a $\neg(\neg X \vee \neg Y)$. Ne segue che ogni f.p. contenente solo $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ può essere riscritta in una forma proposizionale equivalente contenente solo $\vee$ e $\neg$, utilizzando ripetutamente la legge di De Morgan. Pertanto, anche $\{\vee, \neg\}$ è una base di connettivi. Analogamente $\{\wedge, \neg\}$ è un'altra base di connettivi.

Due connettivi molto utilizzati in informatica, e poco nella logica matematica, sono il NAND e il NOR, che abbiamo visto sempre nella sezione 2.2 del libro di testo. Sebbene per questi due connettivi non esistano dei simboli universalmente riconosciuti, nel resto di queste dispense indicheremo il NAND col simbolo $\bar{\wedge}$ e il NOR col simbolo $\bar{\vee}$. Il motivo per cui questi connettivi sono molto interessanti è che sono, da soli, funzionalmente completi. Ovvero, sia l'insieme $\{\bar{\wedge}\}$ che l'insieme $\{\bar{\vee}\}$ sono due basi di connettivi.

Nel resto di questa sezione, verificheremo che $\bar{\wedge}$ è funzionalmente completo. La verifica del fatto che $\bar{\vee}$ è funzionalmente completo si può fare allo stesso modo.

2.1 Completezza funzionale del NAND

Sappiamo già che l'insieme $\{\wedge, \neg\}$ è una base di connettivi. Per verificare che $\{\bar{\wedge}\}$ è una base di connettivi, basta far vedere che qualunque f.p. che usa solo i connettivi $\wedge$ e $\neg$ può essere trasformata in una nuova f.p. che usa solo il connettivo $\bar{\wedge}$. Per far ciò, è sufficiente vedere capire trasformare le f.p. $\neg A$ e $A \wedge B$ in f.p. che utilizzano solo $\bar{\wedge}$.

Non è difficile constatare che $\neg A$ è equivalente a $A \bar{\wedge} A$ (provate a compilare le due tabelle di verità per convincervi della cosa).

D'altronde, sappiamo che $A \bar{\wedge} B \equiv \neg(A \wedge B)$. Negando ambo i membri dell'uguaglianza abbiamo $\neg(A \bar{\wedge} B) \equiv \neg\neg(A \wedge B) \equiv A \wedge B$ dove l'ultima equivalenza segue dalla legge di doppia negazione. Dunque $A \wedge B$ si può scrivere come $\neg(A \bar{\wedge} B)$, e siccome abbiamo visto come rimpiazzare il $\neg$ col $\bar{\wedge}$, abbiamo $A \wedge B \equiv \neg(A \bar{\wedge} B) \equiv (A \bar{\wedge} B) \bar{\wedge} (A \bar{\wedge} B)$.

3 Formalizzazione della logica dei predicati

Provvederemo in questa sezione a formalizzare in maniera precisa la logica dei predicati. In realtà, non introdurremo nessun concetto nuovo, ma rivisiteremo tutto quello visto nel capitolo 5 del libro di testo in termini più formali. Tutto quello che segue va letto dopo aver studiato le sezioni 5.1, 5.2 e 5.3 del libro di testo.

3.1 Formule ben formate

Iniziamo con una definizione precisa di cosa si intende con *formula ben formata* (fbf), concetto già introdotto informalmente nella sezione 5.2 del libro di testo.

Come prima cosa, fissiamo una volta per tutte un insieme infinito $\mathcal{V}$ di *variabili individuali*. Noi useremo $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$ dove i puntini stanno per tutte le possibili varianti di x, y e z con apici e pedici.

Per poter dire cosa è un fbf, occorre decidere quali simboli useremo per le costanti individuali e per le costante predicative. Tutto ciò è specificato dalla *segnatura*.

Definizione 3 (Segnatura)**.** Una segnatura per la logica dei predicati è una tripla $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ dove $\mathcal{C}$ è un insieme di simboli detti *costanti individuali*, $\mathcal{P}$ è un insieme di simboli detti *costanti predicative*, e $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ è una funzione che associa ad ogni costante predicativa un numero naturale, chiamato *arità*, che specifica il numero di individui a cui si applica un determinato predicato.

Normalmente, useremo $a, b, c, \ldots$ per le costanti individuali e $P, Q, R, \ldots$ per le costanti predicative, più eventuali varianti ottenute aggiungendo apici e/o pedici. Tuttavia questa è solo una convenzione, e possiamo liberamente scegliere di utilizzare nomi più evocativi.

Fino ad ora, non abbiamo mai fornito esplicitamente una segnatura, ma abbiamo sempre adottato la scelta convenzionale di cui sopra per costanti e variabili. Inoltre, non abbiamo prestato attenzione a specificare l'arità delle costanti predicative: se abbiamo usato P in una formula del tipo Pab, abbiamo implicitamente assunto che P avesse arità due.

Tuttavia, quando vogliamo essere più formali, e quindi sicuramente in questa sezione della dispensa, dobbiamo fornire una segnatura prima di poter anche solo dire cosa è una fbf e cosa no.

Esempio 3. Un esempio di segnatura per la logica dei predicati è $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ con $\mathcal{C} = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ ed $\mathcal{A} = \{P \mapsto 2, Q \mapsto 2, R \mapsto 3\}$. $\square$

Nello specificare costanti predicative e arità, invece di indicare separatamente le componenti $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}$ di una segnatura, si usa spesso una notazione compatta che consiste nell'indicare solo la componente $\mathcal{P}$, ma facendo seguire ogni costante predicativa da una barra e dalla relativa arità.

Esempio 4. La segnatua Σ dell'Esempio 3 può anche essere specificata, con la notazione più compatta, come $\Sigma = (\{a, b, c, d\}, \{P/1, Q/2, R/3\})$.

Talvolta occorrerà riferirsi a variabili o costanti individuali senza sapere in anticipo se siamo nell'uno o nell'altro caso. Per questo ci può essere utile la seguente definizione.

Definizione 4 (Termine)**.** Data una segnatura Σ, indichiamo con la parola *termine* una qualunque costante o variabile individuale.

Fissata una segnatura, possiamo dire cosa è una formula ben formata. Lo facciamo in due passi, introducendo prima il concetto di formula atomica.

Definizione 5 (Formula atomica)**.** Data una segnatura Σ, una *formula atomica* è una sequenza di simboli (una stringa, per usare una terminologia comune in informatica) della forma $\Pi(t_1, \ldots, t_n)$ dove Π è una costante predicativa di arità n, e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

Nota 1. Utilizzeremo nel seguito le seguenti *meta-variabili* (vedi nota 4 nel capitolo 2 del libro di testo): Π, Φ, Ψ per le costanti predicative; α, β, γ per le costanti individuali; u, v, w per le variabili individuali; r, s, t per i termini; A, B, C per le formule atomiche; X, Y, Z per le formule ben formate. State attenti quindi a non confondere, ad esempio, il simbolo x, che indica un ben precisa variabile individuale, con X che indica una qualche fbf non ben specificata.

Esempio 5. Utilizzando la segnatura dell'Esempio 3, le seguenti sono formule atomiche: Pa, Qax, $Rbya$. Invece, Pab e Qex non sono formule atomiche.

Definizione 6 (Formula ben formata)**.** Data una segnatura Σ, una *formula ben formata* è una sequenza di simboli ottenibile tramite le seguenti regole:

1. ogni formula atomica è un fbf;
2. se X è una fbf, allora $(\neg X)$ è una fbf;
3. se X ed Y sono fbf, allora $(X \vee Y)$, $(X \wedge Y)$, $(X \to Y)$ e $(X \leftrightarrow Y)$ sono fbf;
4. se X è una fbf è $u \in \mathcal{V}$, allora $(\forall u X)$ e $(\exists u X)$ sono fbf;

5. nient'altro è una fbf.

Esempio 6. Nella segnatura dell'Esempio 3, la stringa $(\forall x(Px \to (\exists y Qxy)))$ è una fbf. Partendo da Px e Qxy, che sono formule atomiche, la si ottiene applicando le regole di cui sopra, come segue:

- dalla regola 1, siccome Px e Qxy sono formule atomiche, allora sono anche fbf;
- dalla regole 4, poiché Qxy è una fbf, ne segue che $(\exists y Qxy)$ è una fbf;
- dalla regola 3, poiché Px e $(\exists y Qxy)$ sono fbf, ne segue che $(Px \to (\exists y Qxy))$ è una fbf;
- dalla regola 4, poiché $(Px \to (\exists y Qxy))$ è una fbf, anche $(\forall x(Px \to (\exists y Qxy))$ è una fbf. $\square$

Come abbiamo fatto per le forme proposizionali, tenderemo a omettere l'uso eccessivo di parentesi quando ciò non causa ambiguità. In questi casi, è importante tener conto delle precedenze tra operatori e delle proprietà di associatività di congiunzione e disgiunzione. Inoltre, i quantificatori hanno priorità massimo. Ad esempio, la fbf dell'esempio precedente verrà scritta più semplicemente come $\forall x(Px \to \exists y Qxy)$. Non si può scrivere semplicemente $\forall x Px \to \exists y Qxy$ perché quest'ultima è equivalente a $(\forall x Px) \to (\exists y Qxy)$.

Esempio 7. Utilizzando la segnatura, dell'Esempio 3, le seguenti sono formule ben formate: $(\forall x\, Qax)$ e $(\exists x\, (Qxy \land (\neg Px)))$. Scriveremo però, in forma più semplice, $\forall x\, Qax$ e $\exists x\, (Qxy \land \neg Px)$.

3.2 Variabili libere e vincolate

Sappiamo già che le *variabili libere* di una formula sono quelle variabili che compaiono nella formula senza essere quantificate. Invece, le variabili che appaiono dopo i simboli $\forall$ e $\exists$ si chiamano *variabili vincolate*.

Diamo ora una definizione più formale di questi due concetti. La cosa interessante di queste definizioni è la maniera in cui sono scritte: per definire quali sono le variabili libere di una formula complessa, ci si riconduce a calcolare le variabili libere di formule più semplici e a combinare i risultati. Definizioni di questo tipo si dicono esse date per *induzione strutturale*.

Definizione 7 (Variabili libere)**.** Data una segnatura $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$, si indica con FV (free variables) una funzione che ha come dominio l'insieme delle fbf, come codominio l'insieme delle parti di $\mathcal{V}$ (ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathcal{V}$), e così definita:

- $FV(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = \{t_i \mid t_i \text{ è una variabile}\}$
- $FV(\neg X) = FV(X)$, $FV(X \lor Y) = FV(X) \cup FV(Y)$ (e lo stesso per gli altri connettivi binari)

- $FV(\forall u X) = FV(\exists u X) = FV(X) \setminus \{u\}$

Un elemento di $FV(X)$ si chiama *variabile libera* di X.

La prima clausola nella definizione riguarda le formule atomiche. Se X è una formula atomica, tutte le variabili che compaiono in X sono libere. La definizione nella prima clausola semplicemente raccoglie tutti i termini che sono variabili (perché alcuni termini possono essere costanti) e li mette in un insieme.

La seconda clausola determina le variabili libere di una formula composta come $X \vee Y$ mettendo assieme le variabili libere in X e quelle in Y.

Infine, le variabili libere di $FV(\forall u X)$ sono le stesse variabili libere che compaiono in X meno la variabile u che viene vincolata dal quantificatore.

Esempio 8. Vediamo un esempio di come si applica la definizione di FV ad una formula specifica: $\exists x(Qyx \wedge Qxz)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&FV(\exists x \exists x'(Qyx \wedge Qxz)) = \\
&\qquad FV(\exists x'(Qyx \wedge Qxz)) \setminus \{x\} = \\
&\qquad (FV(Qyx \wedge Qxz) \setminus \{x'\}) \setminus \{x\} = \\
&\qquad (FV(Qyx) \cup FV(Qxz)) \setminus \{x, x'\} = \\
&\qquad (\{y, x\} \cup \{x, z\}) \setminus \{x, x'\} = \{y, z\} \ . \quad \square
\end{aligned}$$

In maniera analoga si definisce una funzione che restituisce le variabili vincolate che sono presenti in una formula.

Definizione 8 (Variabili vincolate)**.** Data una segnatura $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$, si indica con BV (bound variables) una funzione che ha come dominio l'insieme delle fbf, come codominio l'insieme delle parti di $\mathcal{V}$ e così definita:

- $BV(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$

- $BV(\neg X) = BV(X)$, $BV(X \vee Y) = BV(X) \cup BV(Y)$ (e lo stesso per gli altri connettivi binari)

- $BV(\forall u X) = BV(\exists u X) = BV(X) \cup \{u\}$

Un elemento di $BV(X)$ si chiama *variabile vincolata* di X.

Esempio 9. Per la stessa formula dell'esercizio precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&BV(\exists x \exists x'(Qyx \wedge Qxz)) = \\
&\qquad BV(\exists x'(Qyx \wedge Qxz)) \cup \{x\} = \\
&\qquad BV(Qyx \wedge Qxz) \cup \{x'\} \cup \{x\} = \\
&\qquad BV(Qyx) \cup BV(Qxz) \cup \{x, x'\} = \\
&\qquad \emptyset \cup \emptyset \cup \{x, x'\} = \{x, x'\} \ . \quad \square
\end{aligned}$$

Si noti che in una formula, la stessa variabile può comparire sia libera che vincolata. Ad esempio in $Px \wedge \exists x\, Qxy$ la variabile x appare sia libera (in Px) che vincolata (in Qxy).

Definizione 9 (Formule chiuse ed aperte)**.** Se X è una fbf senza variabili libere, ovvero se $FV(X) = \emptyset$, allora si dice essere una formula chiusa. Se invece contiene variabili libere, si dice aperta.

3.3 Strutture e interpretazioni

Di una fbf non si può dire in astratto se è vera o falsa se prima non si fornisce una *interpretazione* per i simboli che in essa appaiono. Questa è stata definita informalmente nella sezione 5.3 del libro di testo. Interpretazione e dominio insieme formano una *struttura*.

Definizione 10 (Struttura)**.** Una struttura $\mathcal{I}$ per la segnatura Σ è data da:

- un insieme $|\mathcal{I}|$ detto *dominio* della struttura;
- per ogni costante individuale α, un elemento del dominio indicato con $\mathcal{I}(\alpha)$;
- per ogni costante predicativa Π di arità n, un sottoinsieme di D^n indicato con $\mathcal{I}(\Pi)$.

L'idea è che il dominio rappresenta l'insieme degli individui di cui parliamo. Ad ogni costante individuale viene associata un individuo specifico, mentre ad ogni costante predicativa viene associata un predicato (proprietà o relazione) sugli individui.

Qualche chiarimento lo merita il fatto che se Π è una costante predicativa di n argomenti, allora $\mathcal{I}(\Pi)$ è un sottoinsieme di D^n. Consideriamo prima il caso $n = 1$. Allora a Π deve essere associato un predicato unario, che abbiamo anche chiamato proprietà. Ad esempio, alla costante predicativa unaria P potremmo associare la proprietà "essere pari". Ma un predicato unario può essere visto come un insieme, l'insieme degli elementi che godono della proprietà. Ad esempio, la proprietà "essere pari" può essere rappresentata dall'insieme $\{x \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$, e dunque $\mathcal{I}(P) = \{x \in \mathbb{N} \mid n \text{ è primo}\}$. Pertanto, se $\mathcal{I}(\Pi)$ è un simbolo di predicato unario, $\mathcal{I}(\Pi)$ è un sottoinsieme di D. Se $n = 2$, a Π deve essere associata una relazione binaria, che si rappresenta come un insieme di coppie (d_1, d_2), dove d_1 e d_2 sono gli elementi di D che si trovano nella relazione in questione. Ad esempio, se alla costante predicativa binaria L vogliamo associare il predicato "essere minore o uguale a", possiamo definire $\mathcal{I}(L) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$. In generale, se Π è una costante ad n argomenti, $\mathcal{I}(\Pi)$ sarà l'insieme delle n-ple di elementi di D che sono in relazione tra loro.

Esempio 10. Sia data un segnatura $\Sigma = (\{a\}, \{P/2, L/2, S/2\})$ e la struttura $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ il cui dominio è $\mathbb{N}$ e tale che:

- $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}(a) = 0$

- $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}(P) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$
- $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}(L) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
- $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}(S) = \{(x, x+1) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Con le opportune modifiche, si ottengono anche $\mathcal{I}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{I}^{\mathbb{Q}}$ ed $\mathcal{I}^{\mathbb{R}}$ per le quali il dominio è, rispettivamente, l'insieme dei numeri interi, razionali e reali. Per gli stessi simboli, possiamo pensare a strutture completamente diverse, quale ad esempio $\mathcal{I}^*$, il cui dominio è $\{x \mid x \text{ è una regione italiana}\}$ ed è tale che:

- $\mathcal{I}^*(a) = \text{Abruzzo}$
- $\mathcal{I}^*(P) = \{x \mid x \text{ è bagnata dal mare}\}$
- $\mathcal{I}^*(L) = \{(x, y) \mid$ il capoluogo di regione di x è più a nord del capoluogo di regione di $y\}$
- $\mathcal{I}^*(S) = \{(\text{Abruzzo}, \text{Toscana}), (\text{Sicilia}, \text{Umbria})\}$

Come ultimo esempio consideriamo la struttura $\mathcal{I}^\sharp$ il cui dominio è l'insieme $\{\text{sasso}, \text{forbici}, \text{carta}\}$ e

- $\mathcal{I}^\sharp(a) = \text{sasso}$
- $\mathcal{I}^\sharp(P) = \{\text{forbici}\}$
- $\mathcal{I}^\sharp(L) = \{(\text{sasso}, \text{forbici}), (\text{forbici}, \text{carta}), (\text{carta}, \text{sasso})\}$
- $\mathcal{I}^\sharp(S) = \emptyset$

Utilizzeremo più volte queste strutture e la corrispondente segnature Σ nel seguito della dispensa. $\square$

Fissare una struttura non è sufficiente per assegnare un valore di verità ad una qualunque fbf, in quanto quest'ultima potrebbe contenere delle variabili libere.

Esempio 11. Anche decidendo di usare la struttura $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$, non possiamo determinare se la formula Lxy è vera o falsa, in quanto ciò dipende dai valori di x ed y. Se ad x assegniamo 2 e ad y assegniamo 3, allora la formula Lxy è vera, ma se invece ad ad x assegniamo 2 e ad y assegniamo 4, la formula Lxy sarà falsa.

Occorre pertanto aggiungere alla interpretazione una funzione che assegni ad ogni variabile individuale un elemento del dominio. Chiamiamo *valutazione* questa funzione.

Definizione 11 (Valutazione)**.** Data una segnatura Σ ed una struttura $\mathcal{I}$, una *valutazione* è una funzione $\nu : V \subseteq \mathcal{V} \to |\mathcal{I}|$, da variabili individuali ad elementi del dominio.

Nel seguito indicheremo con $\{u_1 \mapsto d_1, \ldots, u_n \mapsto d_n\}$ una qualunque valutazione con dominio $\{u_1, \ldots, u_n\}$ che mappa ogni u_i al corrispondente d_i. Attenzione che in questo contesto la parola "dominio" si riferisce al classico dominio di una funzione, non al dominio di una struttura! Una notazione molto utile che utilizzeremo nel seguito è quella che segue:

Definizione 12 (Aggiornamento di una valutazione)**.** Sia data una segnatura Σ e una struttura $\mathcal{I}$. Se ν è una valutazione, u una variabile individuale e d un elemento del dominio, con $\nu[u \mapsto d]$ indichiamo una nuova valutazione che coincide con ν per tutte le variabili tranne che per u, caso nel quale restituisce d. In altri termini:

$$\nu[u \mapsto d](v) = \begin{cases} d & \text{se } u = v \\ \nu(v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il dominio di $\nu[u \mapsto d]$ è uguale al dominio di ν con l'aggiunta, se necessario, della variabile u.

Esempio 12. Data la solita segnatura Σ e l'interpretazione $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$, $\nu = \{x \mapsto 3, y \mapsto 3\}$ è una valutazione. Con $\nu[x \mapsto 2]$ si intende la valutazione che mappa y a 3 ed x a 2.

Definizione 13 (Intepretazione dei termini)**.** Data una segnatura Σ, una interpretazione $\mathcal{I}$ ed una valutazione ν, possiamo assegnare ad ogni termine t un elemento del dominio, indicato con $\mathcal{I}_\nu(t)$, definito come segue:

$$\mathcal{I}_\nu(t) = \begin{cases} \mathcal{I}(t) & \text{se } t \text{ è una costante individuale,} \\ \nu(t) & \text{se } t \text{ è una variabile individuale.} \end{cases}$$

Se abbiamo a disposizione sia una struttura, sia una valutazione, possiamo assegnare un valore di verità ad ogni fbf, come segue:

Definizione 14 (Valore di verità di una fbf)**.** Data una segnatura Σ, una struttura $\mathcal{I}$, una valutazione ν ed una fbf X, indichiamo con $\mathcal{I}_\nu(X)$ il valore di verità di X, ottenuto come segue:

1. $\mathcal{I}_\nu(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = V$ se $(\mathcal{I}_\nu(t_1), \ldots, \mathcal{I}_\nu(t_n)) \in \mathcal{I}(\Pi)$, $\mathcal{I}_\nu(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = F$ altrimenti.

2. $\mathcal{I}_\nu((\neg X)), \mathcal{I}_\nu((X \vee Y)), \mathcal{I}_\nu((X \wedge Y)), \mathcal{I}_\nu((X \to Y)), \mathcal{I}((X \leftrightarrow Y))$ si ottengono da $\mathcal{I}_\nu(X)$ ed $I_\nu(Y)$ applicando le definizioni standard dei connettivi logici.

3. $\mathcal{I}_\nu((\forall u X)) = V$ se **per tutti** gli elementi d del dominio, si ha $\mathcal{I}_{\nu[u \mapsto d]}(X) = V$, altrimenti $\mathcal{I}_\nu((\forall u X)) = F$;

4. $\mathcal{I}_\nu((\exists u X)) = V$ se **esiste** un elemento d del dominio tale che $\mathcal{I}_{\nu[u \mapsto d]}(X) = V$, altrimenti $\mathcal{I}_\nu((\exists u X)) = F$.

Il punto 1 della definizione di cui sopra riguarda le formule atomiche. Queste formule sono vere quando le interpretazioni dei termini sono effettivamente in relazione tra di loro secondo l'interpretazione del predicato Π.

Il punto 2 ci dice che, per interpretare i connettivi, possiamo rifarci a quanto già conosciamo dalla logica proposizionale.

Il punto 3 afferma che la formula $\forall u X$ è vera se X è vera qualunque sia l'elemento del dominio rappresentato da u. Notare che X viene controllata su tutti gli elementi del dominio, non solo su quelli che hanno una costante individuale associata. Infine, il punto 4 è simile al punto 3 ma per il quantificatore esistenziale.

Si noti che se ν e ν' sono due assegnamenti che coincidono su tutte le variabili libere di X, allora $\mathcal{I}_\nu(X) = \mathcal{I}_{\nu'}(X)$. In particolare, se X non ha variabili libere, $\mathcal{I}_\nu(X)$ non dipende affatto da ν, e possiamo scrivere semplicemente $\mathcal{I}(X)$.

Esempio 13. Consideriamo la formula $X = \forall x Lax$ e calcoliamo il suo valore di verità nella struttura $\mathcal{I}^\sharp$. Per determinare $\mathcal{I}^\sharp(X)$ dobbiamo calcolare il valore di verità di $\mathcal{I}^\sharp_{x \mapsto d}(Lax)$ al variare di d nell'insieme $\{\text{carta}, \text{forbice}, \text{sasso}\}$. Quando $d = \text{carta}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{carta}\}}(Lax) = V \text{ sse} \\
& (\mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{carta}\}}(a), \mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{carta}\}}(x)) \in \mathcal{I}^\sharp(L) \text{ sse} \\
& (\text{sasso}, \text{carta}) \in \{(\text{sasso}, \text{forbici}), (\text{forbici}, \text{carta}), (\text{carta}, \text{sasso})\}
\end{aligned}$$

che è ovviamente falso, quindi $\mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{carta}\}}(Lax) = F$ In maniera analoga, ricaviamo che $\mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{forbice}\}}(Lax) = V$ e $\mathcal{I}^\sharp_{\{x \mapsto \text{sasso}\}}(Lax) = F$. Siccome questi valori di verità non sono tutti V, allora $\mathcal{I}^\sharp(\forall x Lax) = F$. Intuitivamente, la "traduzione" in italiano di questa fbf sarebbe "Il sasso vince contro tutte le altre figure nella morra cinese". D'altro canto, siccome almeno l'assegnamento $\{x \mapsto \text{forbice}\}$ rende vera la formula Lax, abbiamo $\mathcal{I}^\sharp(\exists x Lax) = V$. □

Esempio 14. Consideriamo la stessa formula dell'esercizio precedente, ma nella struttura $\mathcal{I}^\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I^\mathbb{N}(X) = V \text{ sse} \\
& \text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ \mathcal{I}^\mathbb{N}_{\{x \mapsto d\}}(Lax) = V \text{ sse} \\
& \text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ (\mathcal{I}^\mathbb{N}_{\{x \mapsto d\}}(a), \mathcal{I}^\mathbb{N}_{\{x \mapsto d\}}(x)) \in \mathcal{I}^\mathbb{N}(L) \text{ sse} \\
& \text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ (0, d) \in \mathcal{I}(L) \text{ sse} \\
& \text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ 0 \leq d
\end{aligned}$$

che vuol dire "0 è minore o uguale di tutti i numeri naturali". Questa affermazione è ovviamente vera.

Dunque, cambiando la struttura da $\mathcal{I}^\sharp$ a $\mathcal{I}^\mathbb{N}$, il valore di verità di X è cambiato. Se passiamo a $\mathcal{I}^\mathbb{Z}$, abbiamo che $\mathcal{I}^\mathbb{Z}(X) = F$, perché sappiamo che in $\mathbb{Z}$ ci sono numeri più piccoli di 0.

Se interpretiamo la stessa formula in $\mathcal{I}^*$, il significato diventa: "i capoluoghi di regione di tutte le regioni italiane sono a più a nord del capoluogo di regione dell'Abruzzo". Questa affermazione è ovviamente falsa.

Esempio 15. Consideriamo la formula $\exists x(Sxy \land \neg Px)$ nella segnatura dell'Esempio 8. Siccome è una formula aperta, il suo valore di verità dipende da come interpretiamo la variabile libera y. Abbiamo che se n è pari, allora $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}_{y \mapsto n}(\exists x(Sxy \land \neg Px)) = V$, altrimenti $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}_{y \mapsto n}(\exists x(Sxy \land \neg Px)) = F$.

Definizione 15 (Modelli)**.** Se con l'interpretazione $\mathcal{I}$ e assegnamento ν si ha $\mathcal{I}_\nu(X) = V$, diciamo che $\mathcal{I}$ è un modello di X rispetto a ν, e lo indichiamo con $\mathcal{I} \models_v X$. Se X è una formula chiusa, scriveremo semplicemente $\mathcal{I} \models X$.

Esempio 16. Data la struttura $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$, si ha che $\mathcal{I}^{\mathbb{N}}$ è un modello per $\forall x\, Lax$, ovvero $\mathcal{I} \models \forall x\, Lax$. Se ν è una qualunque valutazione tale che $\nu(y)$ è dispari, si ha $\mathcal{I} \models_\nu \exists x(Sxy \land \neg Px)$. Invece, se $\nu(y)$ è pari, $\mathcal{I} \not\models_\nu \exists x(Sxy \land \neg Px)$.

L'equivalente della tautologia nella logica dei predicati è una fbf che ha sempre valore di verità V in qualunque interpretazione.

Definizione 16 (Formule valide)**.** Data una segnatura Σ, diciamo che una fbf chiusa X è *valida* se, in tutte le strutture $\mathcal{I}$, si ha che $\mathcal{I} \models X$.

Esempio 17. La formula $\forall x Px \to \exists x Px$ è valida.

Definizione 17 (Conseguenza logica)**.** Data una segnatura Σ, una formula X è conseguenza logica delle formule $Y_1, \ldots, Y_n$ quando ogni struttura che è modello di $Y_1, \ldots, Y_n$ è anche modello di X.

Esempio 18. La formula Pa è conseguenza logica di Laa e $\forall x Lxx \to Px$.