

Logica Matematica

Proposizioni semplici

prof. Gianluca Amato

Corso di Laurea in Economia e Informatica per l'Impresa

14 ottobre 2019

Proposizioni semplici e composte

Abbiamo visto nell'introduzione che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la **forma logica** delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la struttura di una proposizione.

Proposizioni semplici e composte

Abbiamo visto nell'introduzione che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la **forma logica** delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la struttura di una proposizione.

Definizione (Proposizioni semplici e composte)

Una proposizione si dice **semplice** (o **atomica**) se non contiene al suo interno una parte che è a sua volta una proposizione; in caso contrario si dice **composta**.

Esempio (Proposizioni semplici)

Carlo è ligure

Carlo è più alto di Mario

Tutti gli uomini sono mortali

Esempio (Proposizioni composte)

Non è vero che Carlo è ligure

Marcello è matematico o fisico

Se manca la benzina, l'auto non parte

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano
Marco sta leggendo
Carlo è più alto di Massimo
Monza ha più abitanti di Milano
Dario è figlio di Ernesto e Maria
Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**
- una **relazione ternaria**

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**
- una **relazione ternaria**
- in generale, una relazione n -aria

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

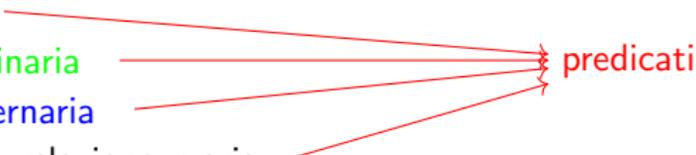
Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
 - una **relazione binaria**
 - una **relazione ternaria**
 - in generale, una relazione n -aria
- predicati**
- 

Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

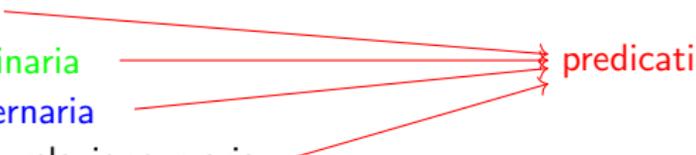
Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
 - una **relazione binaria**
 - una **relazione ternaria**
 - in generale, una relazione n -aria
-  **predicati**

Definizione (Proposizioni semplici del primo tipo)

Le **proposizioni semplici del primo tipo** sono proposizioni in cui un predicato ad n argomenti viene applicato ad n individui.

Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Ci si può riferire ad un individuo in vari modi:

- tramite un **nome** proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una **descrizione definita** che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

Il cane di Giovanni è fedele

Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe

$5^2 + 3$ è pari

Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Ci si può riferire ad un individuo in vari modi:

- tramite un **nome** proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una **descrizione definita** che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

Il cane di Giovanni è fedele
Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe
 $5^2 + 3$ è pari

In logica, nomi e descrizioni definite sono chiamati **termini**.

Quantificatori (1)

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Tutti gli uomini sono mortali
Vi è un italiano più alto di due metri
Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

Contengono dei **quantificatori**: *tutti*, *ogni*, *vi è*, *almeno*.

Prenderemo in considerazione soltanto due quantificatori:

- **per ogni**, chiamato **quantificatore universale**, che equivale a *tutti*, *ogni*, etc..
“*per ogni* x , ...” significa: tutti gli individui soddisfano ...
- **esiste**, chiamato **quantificatore esistenziale**, che equivale a *vi è*, *almeno*, etc..
“*esiste* x tale che ...” significa: vi è almeno un individuo che soddisfa ...

L'uso di questi due quantificatori richiede l'introduzione di lettere come x , y , z , ..., chiamate **variabili individuali**

Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri



Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri



Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri



Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Ogni studente universitario frequenta almeno un corso



Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri



Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Ogni studente universitario frequenta almeno un corso



Per ogni x , se x è uno studente universitario, allora esiste y tale che y è un corso ed x frequenta y

Quantificatori (3)

Alcune osservazioni.

- 1 Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori *vaghi* di cui non ci occupiamo:

*Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.
La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.*

- 2 Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.



Quantificatori (3)

Alcune osservazioni.

- 1 Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori *vaghi* di cui non ci occupiamo:

*Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.
La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.*

- 2 Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.



Per ogni x , se x è buono esiste y tale che y ama x .

La stessa parola “*qualcuno*” gioca due ruoli differenti da quantificatore esistenziale ed universale.

Proposizioni semplici del secondo tipo

Definizione

Le proposizioni semplici che iniziano con “*per ogni*” si dicono **quantificate universalmente**, quelle che iniziano con “*esiste*” si dicono **quantificate esistenzialmente**.

Definizione (Proposizioni semplici del secondo tipo)

Le **proposizioni semplici del secondo tipo** sono le proposizioni quantificate universalmente o esistenzialmente.

Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione “*Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale*”.

La frase “ x è un uomo” è una proposizione?

Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione “*Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale*”.

La frase “ x è un uomo” si chiama **funzione proposizionale**. Non è una proposizione perché il valore di verità dipende da chi è x . Il libro li chiama anche, a mio avviso impropriamente, predicati.

Dalla funzione proposizionale “ x e y vanno a vedere z ”, possiamo ottenere altre funzioni proposizionali rimpiazzando le variabili con termini:

- *Stefano e y vanno a vedere z*
- *Stefano e y vanno a vedere il derby Milan-Inter*
- *Stefano e Marcello vanno a vedere z*
- ...

Se rimpiazzo tutte le variabili ottengo una proposizione:

- *Stefano e Marcello vanno a vedere il derby Milan-Inter*

Si dice che le variabili x , y e z , nei casi di sopra, sono **libere**.

Le funzioni proposizionali possono essere trasformate in proposizioni:

- rimpiazzando variabili con termini (slide precedente);
- usando i quantificatori.

Per esempio, da “ $x ama y$ ” otteniamo:

- *Elisa ama Massimo*
- *Esiste x tale che $x ama Massimo$ (Vi è qualcuno che ama Massimo)*
- *Per ogni x , $x ama Massimo$ (Tutti amano Massimo)*
- *Per ogni y , $Elisa ama y$ (Elisa ama tutti).*

In queste frasi, non si può rimpiazzare una variable con un nome... la frase seguente non ha alcun significato:

- *Esiste Elena tale che Elena ama Massimo*

Le variabili in questo caso si dicono **vincolate**. I quantificatori **vincolano** le variabili a cui sono applicate.