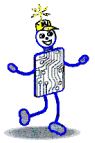


CAPITOLO 5: Rappresentazione di dati numerici

The Architecture of Computer Hardware and Systems Software & Networking:

An Information Technology Approach

5th Edition, Irv Englander

John Wiley and Sons ©2013

Diapositive realizzate da Angela Clark, University of South Alabama
Diapositive per la 4° edizione realizzate da Wilson Wong, Bentley University
Diapositive per il CLEII tradotte e adattate da Gianluca Amato, Univ. CH-PE

Rappresentazione dei numeri

- I numeri possono essere rappresentati con una combinazione di
  - Valore assoluto
  - Segno (più o meno)
  - Cifre decimali (se necessarie)

Numeri senza segno

- Binario: Numero intero senza segno in binario
- BCD: Rappresentazione binaria cifra per cifra del numero
  - 4 bits: 0 to 9
  - 8 bits: 0 to 99
  - 16 bits: 0 to 9,999
  - 32 bits: 0 to 99,999,999

Decimale	Binario	BCD (binary coded decimal)
68	= 0100 0100 = $2^6 + 2^2 = 64 + 4 =$ ***68***	= 0110 1000 = $2^2 + 2^1 =$ ***6*** $2^3 =$ ***8***
99 (largest 8-bit BCD)	= 0110 0011 = $2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 =$ = 64 + 32 + 2 + 1 = ***99***	= 1001 1001 = $2^3 + 2^0$ $2^3 + 2^0$ = ***9*** ***9***
255 (largest 8-bit binary)	= 1111 1111 = $2^8 - 1 =$ ***255***	= 0010 0101 0101 = 2^1 $2^2 + 2^0$ $2^2 + 2^0$ = ***2*** ***5*** ***5***

Intervallo rappresentabile

- Intervallo dei valori rappresentabili in BCD < intervallo valore rappresentabili in binario tradizionale
  - Binario: 4 bits possono rappresentare 16 differenti valori (da 0 a 15)
  - BCD: 4 bits possono rappresentare solo 10 valori differenti (da 0 a 9)

No. of Bits	BCD Range		Binary Range	
4	0-9	1 digit	0-15	1+ digit
8	0-99	2 digits	0-255	2+ digits
12	0-999	3 digits	0-4,095	3+ digits
16	0-9,999	4 digits	0-65,535	4+ digits
20	0-99,999	5 digits	0-1 million	6 digits
24	0-999,999	6 digits	0-16 million	7+ digits
32	0-99,999,999	8 digits	0-4 billion	9+ digits
64	$0-(10^{16}-1)$	16 digits	0-16 quintillion	19+ digits

Binario vs BCD

- Generalmente la rappresentazione binaria è preferita
  - Intervallo di valori rappresentabili più ampio a parità di bit
  - Calcoli più semplici
- Il BCD è usato spesso in applicazioni aziendali per non avere problemi di arrotondamento e conversione dal decimale
  - ci torneremo quando parleremo di numeri con la virgola

Interi con segno

- Non c’è una maniera univoca di rappresentare il segno in binario
- Opzioni:
  - Rappresentazione *modulo e segno*
  - Complemento a 1
  - Complemento a 2 (la più comune)

Modulo e segno

- Usare il bit più a sinistra per il segno
  - 0 = più; 1 = meno
- Intervallo di interi rappresentabili:
  - Metà degli interi sono positivi, metà negativi
  - Valore assoluto dell'intero più grande è (circa) la meta del caso senza segno
- Esempio usando 8 bit:
  - Senza segno: 1111 1111 = +255
  - Con segno: 0111 1111 = +127
1111 1111 = -127
  - Nota: 2 valori per 0:
+0 (0000 0000) e -0 (1000 0000)

Algoritmi di calcolo complessi

- Gli algoritmi di calcolo per la rappresentazione modulo e segno sono complessi e difficile da implementare in hardware
  - Bisogna controllare i 2 valori of 0
  - Si esegue in realtà addizione o sottrazione sulla base dei segni e della grandezza dei numeri coinvolti
  - Utile per la rappresentazione BCD
- Esempio: Algoritmo di addizione in base 10

Addizione: 2 Positive Numbers	Addizione: 1 Signed Number		
4	4	2	12
+2	- 2	- 4	- 4
6	2	-2	8

Rappresentazione in complemento

- Il segno dei numeri non va trattato in maniera speciale
- Operazioni svolte in maniera consistente per tutte le combinazioni di segno e valore degli addendi
- Due metodi
  - Alla base / Alla base diminuita
  - Nel sistema decimale
    - il complemento alla base è il complemento a 10
    - Il complemento alla base diminuita è il complemento a 9

Complemento a 9

- *Fare il complemento di v*: sottrarre *v* da un valore standard che dipende dalla base
- Base 10: complemento a base diminuita = complemento a 9
  - Esempio con 3 cifre: valore standard da cui sottrarre = 999
  - L'intervallo di possibili valore da 000 a 999 si divide arbitrariamente a 500
  - Due numeri per lo zero

Numberi	Negativo		Positivo	
Rappresentazione	Complemento		Il numero stesso	
Range of decimal numbers	***-499***	***-000***	***+0***	***499***
Calculation	999 - number		nessuno	
Representation example	***500***	***999***	***0***	***499***

999 – 499

– Valori crescenti +

Complemento a 9 (base 10)

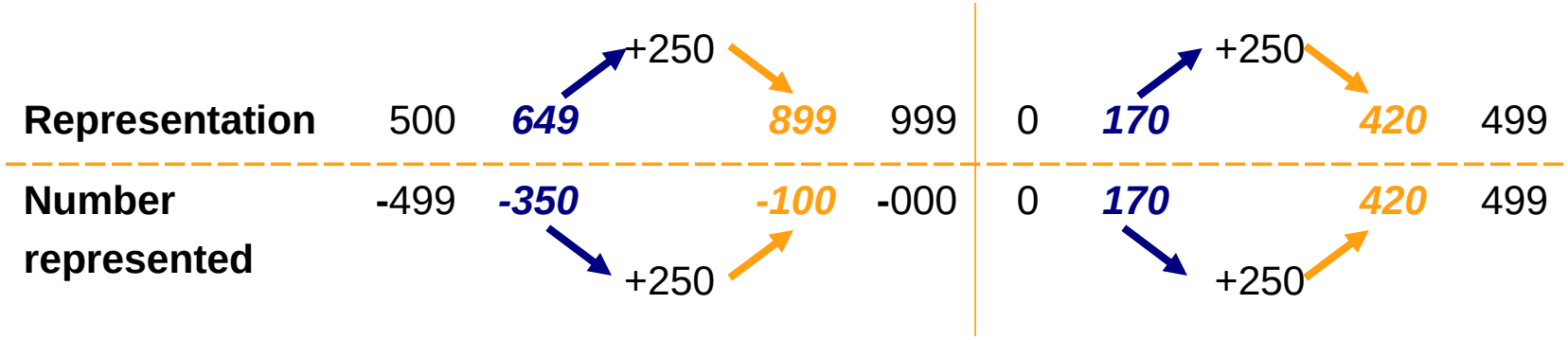
- È necessario specificare il numero di cifre, detto anche *dimensione della parola*
- Esempio: rappresentazione con 3 cifre
  - Prima cifra = da 0 a 4 ➡numero positivo
  - Prima cifra = da 5 a 9 ➡numero negativo
- Conversione da complemento a 9 in rappresentazione usuale
  - **321** rimane **321**
  - **521**: fare il complemento - (999 - 521) = **–478**

Complemento e negazione

- L'operazione di complemento ci consente di passare dalla rappresentazione di un numero alla rappresentazione del suo opposto
- Esempio
  - 999 – 478 = 521
  - 999 – 521 = 478
- Se complementiamo un numero due volte, si torna al valore iniziale
  - Complement = basis – value
  - Complement twice
    - Basis – (basis – value) = value

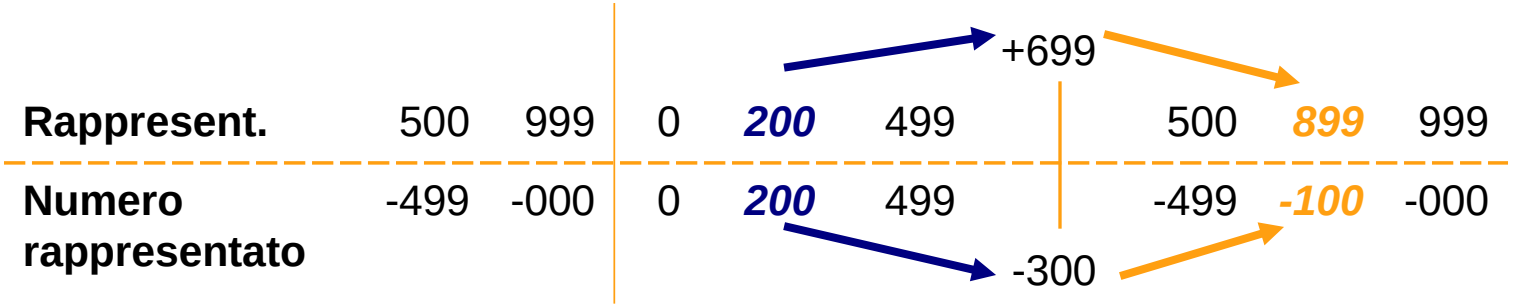
Addizione modulare

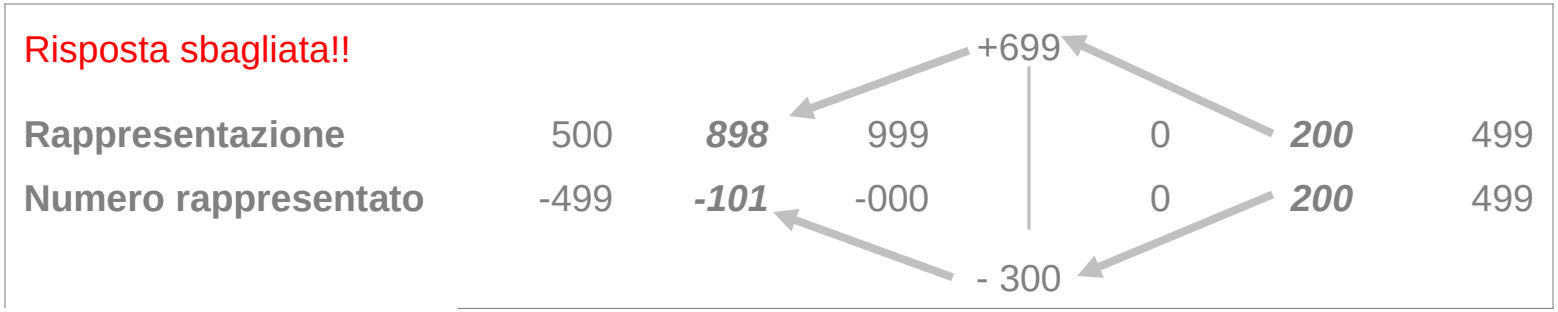
- Muoversi verso l'alto nella scala corrisponde all'addizione
- Esempio in complemento a 9: non si attraversa il valore standard 999



Addizione con wraparound

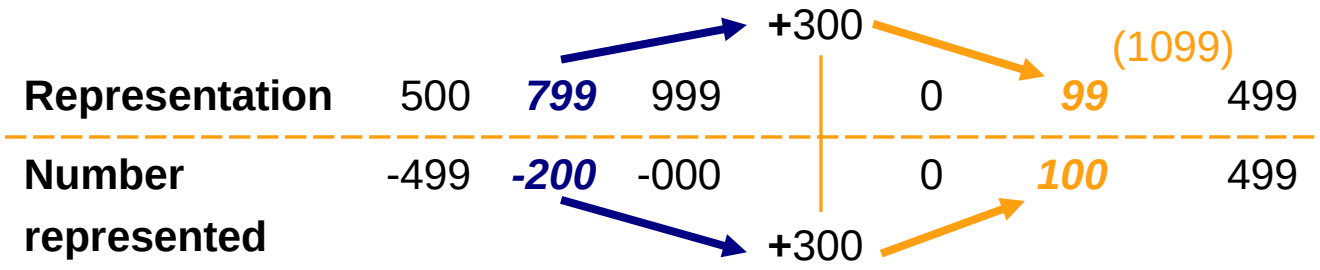
- Contare verso destra per aggiungere un valore negativo
- Contare verso sinistra attraverserebbe il modulo e darebbe una risposta scorretta perché ci sono due valori di 0 (+0 e -0)





Addizione con riporto

- Contare a destra può attraversare 999
  - Il risultato è sbagliato perché si attraversano due zeri
- Addizione con end-around carry:
  - Sommare 2 numeri in complemento a 9 normalmente
  - Se si genera un riporto, sommalo al risultato



799
300
1099
1
100

Overflow

- Una parola di dimensione fissa ha un intervallo di valori rappresentabili limitato
- *Overflow*: combinazione di numeri che, sommati, generano un risultato fuori dall'intervallo consentito
  - Nella notazione in complemento, l'overflow non si verifica mai se si sommano numeri di segno opposto
  - Se si sommano numeri dello stesso segno ma il risultato è di segno opposto, si è verificato un overflow.

Complemento a 1 (base 2)

- *Fare il complemento di v*: sottrarre *v* da un valore standard che dipende dalla base
  - Base 2: complemento a base diminuita = base 1
  - Esempio con 3 cifre: v → 111 - v
- *Inversione: si cambiano gli 1 in zero e viceversa*
  - Numeri che iniziano con 0 sono positivi
  - Numeri che iniziano con 1 sono negativi
  - 2 valori per lo zero
- Esempio con numeri a 8 bit

Numero	Negativo		Positivo	
Rappresentazione	Complemento		Numero stesso	
Intervallo numerico	-127_{10}	-0_{10}	$+0_{10}$	127_{10}
Calcolo	Inversione		Nessuno	
Esempio rappresentazione	10000000	11111111	00000000	01111111

Addizione

- Sommare 2 numeri positivi a 8 bit

- Sommare 2 numeri a 8 bit di segno diverso
  - Prendere il complemento a 1 di 58 (invertire)
    0011 1010
    1100 0101

0010 1101 = 45
0011 1010 = 58
0110 0111 = 103

0010 1101 = 45
1100 0101 = –58
1111 0010 = **–13**

0000 1101
8 + 4 + 1 = 13

Inverti per ottenere il valore assoluto

Addizione con riporto

- Numero a 8 bit
  - Inversione
    0000 0010 (2_{10})
    1111 1101
  - Addiziona
  - 9 bit

0110 1010	=	106
1111 1101	=	–2
10110 0111		
Aggiunta riporto +1		
0110 1000	=	104

Sottrazione

- Numero a 8 bit
  - Inversione
    0101 1010 (90_{10})
    1010 0101
  - Addizione
  - 9 bit

Aggiunta riporto

0110 1010	=	106
–0101 1010	=	90
0110 1010	=	106
–1010 0101	=	90
10000 1111		
+1		
0001 0000	=	16

Overflow

- Numeri a 8 bit
  - 256 combinazioni diverse
  - Numeri positivi: 0 to 127
- Addizione
  - Controllare gli *overflow*
  - 2 numeri positivi producono un risultato negativo → *overflow!*
  - Risposta sbagliata!
- Attenzione: la maggior parte dei linguaggi non controlla il verificarsi di overflow!

0100 0000	=	64
0100 0001	=	65
1000 0001		-126
0111 1110		

Inverti per ottenere il valore assoluto

126_{10}

Complemento a 10

- Uso la base per l'operazione di complementazione
  - Su 3 cifre, il valore da cui sottrarre è $10^3 = 1000$
  - L'intervallo di possibili valore da 000 a 999 si divide arbitrariamente a 500
  - Una sola rappresentazione per 0

Numero	Negativo		Positivo	
Rappresentazione	Complemento		Numero stesso	
Intervallo numerico	***-500***	***-001***	***0***	***499***
Calcolo	1000 - il numero		nessuno	
Esempio rappresentazione	***500***	***999***	***0***	***499***

Esempi con numeri di 3 cifre

- Esempio 1:
  - Rappresentazione in complemento a 10 di 247
    - 247 (positive number)
  - Complemento a 10 di 247
    - 1000 – 247 = 753 (negative number)
- Esempio 2:
  - Numero corrispondente al valore 17 in rappresentazione con complemento a 10
    - Positivo perché prima cifra è 0 (su 3 cifre, 17 = 017)
    - 1000 – 017 = 983
- Esempio 3:
  - Numero corrispondente al valore 777 in rappresentazione con complemento a 10
    - Numero negativo perché la prima cifra è 7
    - 1000 – 777 = 223
    - Valore in notazione convenzionale = -223

Metodo alternativo per il complemento a 10

- Basato sul complemento a 9
- Esempio usando numeri di 3 cifre
  - Notare: 1000 = 999 + 1
  - Complemento a 9 di *v* = 999 – *v*
  - Riscrivendo
    - Complemento a 10 di *v* = 1000 – *v* = 999 + *1* – v
  - Complemento a 10 = complemento a 9 + 1
- Più facile da effettuare, specialmente quando si lavora con numeri binari

Complemento a 2

- Modulo = Un 1 seguito dal numero di zeri che dipende dalla dimensione della parola
  - Per 8 bit, sottrarre da $2^8 = 100000000_2$ (modulo)
- Due modo per trovare il complemento
  - Sottrarre dal modulo o invertire e sommare 1

Numbero	Negativo		Positivo	
Rappresentazione	Complemento		Il numero stesso	
Intervallo numerico	-128_{10}	-1_{10}	$+0_{10}$	127_{10}
Calcolo	Complemento		Nessuno	
Esempio rappresentazione	10000000	11111111	00000000	01111111

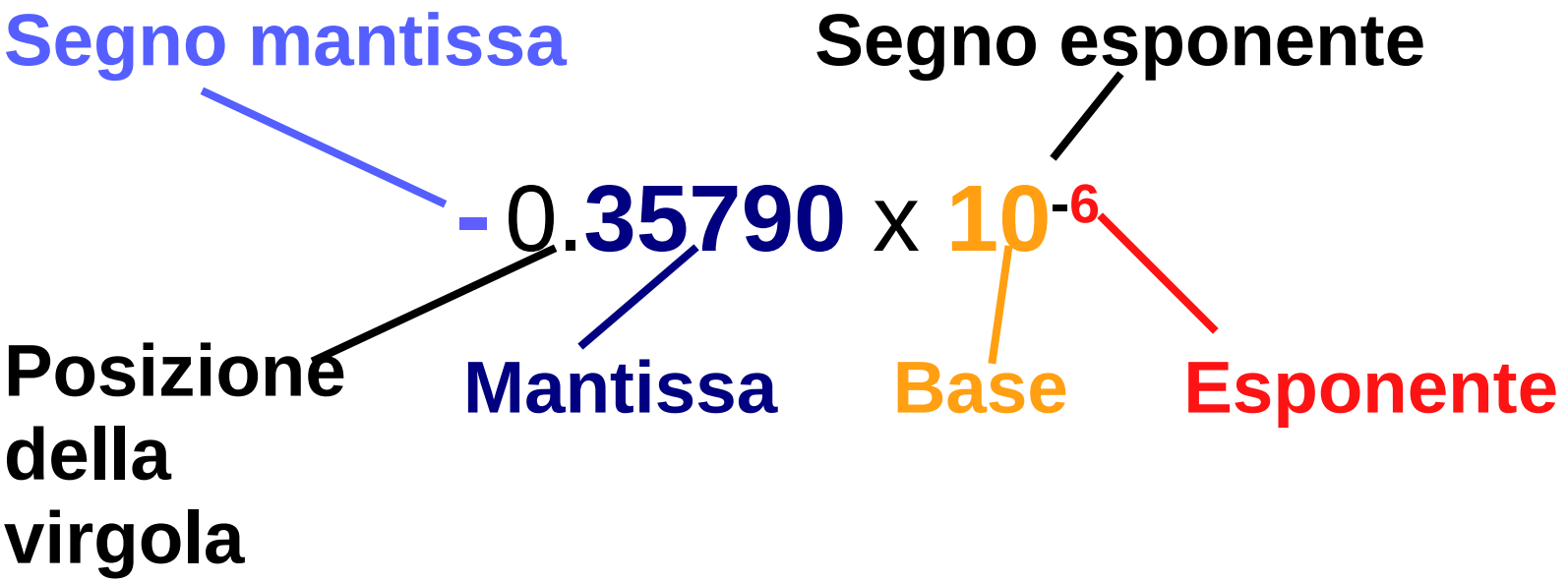
Overflow e riporto

- *Riporto (carry)*: si verifica quando una addizione o sottrazione supera il numero di cifre stabilite
- *Overflow*: il risultato della addizione o sottrazione altera il segno del risultato

Notazione esponenziale

- Anche chiamata *notazione scientifica*
  - 12345
  - 12345 x 10^{0}
  - 0.12345 x 10^{5}
  - 123450000 x 10^{-4}
- 4 informazioni richieste per un numero
  1. Segno (“+” nell’esempio)
  2. Valore assoluto o *mantissa* (12345)
  3. Segno dell’esponente (“+” in 10^{5})
  4. Valore assoluto dell’esponente (5)
- E in più
  5. Base dell’esponente (10)
  6. Posizione della virgola

Riepilogo



Esempio formato con 8 cifre

- Decidiamo di rappresentare un numero con 8 cifre decimali
  - Tradeoff tra precisione mantissa e intervallo di valori possibili

Segno della mantissa

SEEMMMMM

2 cifre per esponente **5 cifre per mantissa**

Formato

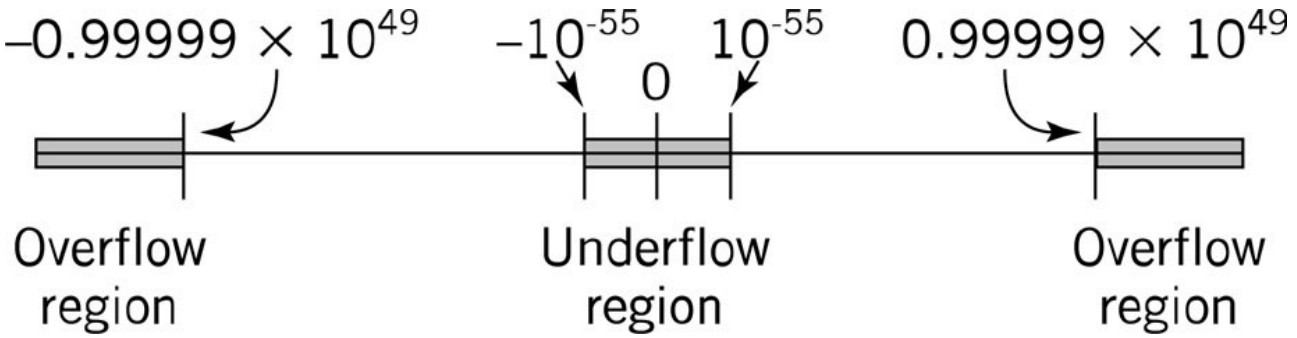
- Mantissa: nel formato *modulo e segno*
- Assumiamo che la virgola sia all'inizio della mantissa.
- Notazione eccesso-N: simile alla notazione in complemento
  - Considerare N come lo 0, N+1 come 1, N+2 come 2, N-1 come -1, etc….

Representation	*0*	*49*	*50*	*99*
Exponent being represented	***-50***	***-1***	***0***	***49***

– Increasing value +

Overflow e Underflow

- È possibile che il numero sia troppo grande o troppo piccolo per la rappresentazione



Calcoli in virgola mobile

- Addizione e sottrazione
  - Esponente e mantissa trattati separatamente
  - Gli esponenti dei numeri devono essere uguali
    - Allineare i punti decimali
    - Cifre meno significative possono essere perse
  - L'overflow della mantissa richiede la modifica dell'esponente.

Addizione e sottrazione

Somma 2 numeri in virgola mobile		05199520
	+	04967850
Allinea gli esponenti		05199520
		0510067850
Somma le mantisse; (1) indica riporto		(1)0019850
Il riporto richiede traslazione a destra		05210019(850)
Arrotondamento		05210020

Controllo dei risultati

$05199520 = 0.99520 \times 10^{1}$ = 9.9520

$04967850 = 0.67850 \times 10^{1}$ = 0.06785

= 10.01985

In forma esponenziale = 0.1001985×10^{2}

Moltiplicazione e divisione

- Mantisse: moltiplicate o divise
- Exponenti: sommate o sottratte
  - Normalizzazione necessaria per
    - Rimettere a posto la posizione della virgola
    - Mantenere la precisione del risultato
  - Sistemare il valore di eccesso perché è stato aggiunto due volte
    - Esempio: 2 numeri con esponente= 3 rappresentati in notazione eccesso-50
    - 53 + 53 =106
    - Poiché 50 è stato aggiunto due volte, sottrarlo per ottenere il valore corretto: 106 – 50 = 56

Moltiplicazione e divisione

- Mantenere la precisione
  - Normalizzazione e arrotondamento
    - Moltiplicare 2 numeri
    - Somma esponenti, sottrai eccesso
    - Moltiplica mantisse
    - Normalizza il risultato
    - Arrotonda il risultato
    - Controlla il risultato
    - Normalizzando e arrotondando

05220000
x 04712500

52 + 47 – 50 = 49

0.20000 x 0.12500 = 0.025000000

04825000

04825000

$05220000 = 0.20000 \times 10^{2}$

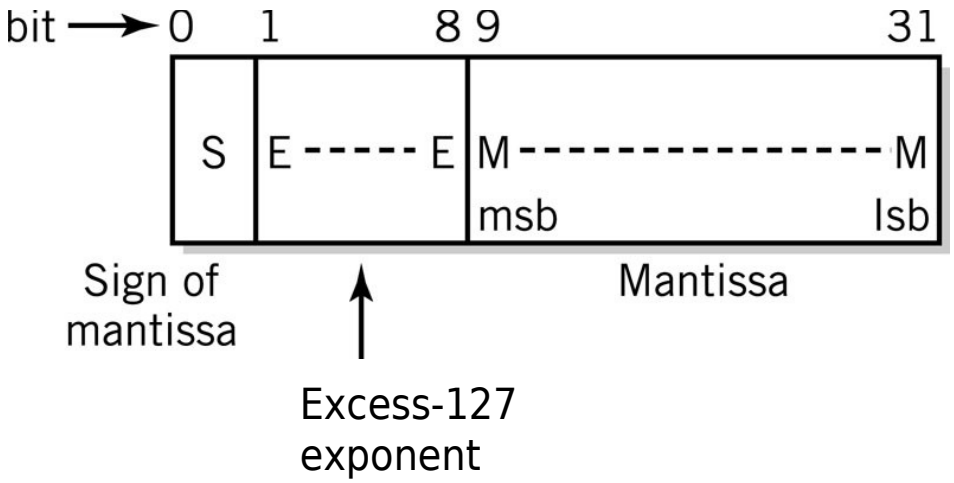
$04712500 = 0.125 \times 10^{-3}$

$= 0.0250000000 \times 10^{-1}$

0.25000×10^{-2}

Virgola mobile nel computer

- Tipico formato in virgola mobile
  - 32 bits forniscono un intervallo da ~10^{-38} to 10^{+38}
  - Esponente ad 8-bit = 256 valori possibili
    - Notazione eccesso-127
  - 23 bit per mantissa: circa 7 cifre decimali di precisione



Standard IEEE 754

- Definizione dei valori virgola mobile a 32 bit

Exponent	Mantissa	Value
0	±0	0
0	Not 0	$\pm 2^{-126} \times 0.M$
1^{-254}	Any	$\pm 2^{-127} \times 1.M$
255	±0	±∞
255	not 0	special condition

Considerazione per la programmazione

- Vantaggi degli interi
  - Più facile lavorarci sopra per i computer
  - Potenziale per una precisione maggiore
  - Esecuzione più rapida
  - Minore occupazione di memoria
- La maggior parte dei linguaggi ad alto livello fornisce 2 o più formati
  - Short integer (16 bits)
  - Long integer (64 bits)

Considerazione per la programmazione

- Numeri in virgola mobile
  - Quando usarli?
    - Variabili o costanti hanno una parte frazionale
    - Numeri molto grandi al di fuori dell'intervallo rappresentabile con gli interi
  - I programmi dovrebbero usare la precisione minima necessaria per il compito che si prefiggono
  - La notazione BCD a virgola fissa è una alternativa per le applicazioni aziendali

Copyright 2013 John Wiley & Sons