

# Logica Matematica

## Proposizioni semplici

prof. Gianluca Amato

Corso di Laurea in Economia e Informatica per l'Impresa

19 settembre 2017

# Proposizioni semplici e composte

Abbiamo visto nell'introduzione che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la **forma logica** delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la struttura di una proposizione.

# Proposizioni semplici e composte

Abbiamo visto nell'introduzione che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la **forma logica** delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la struttura di una proposizione.

## Definizione (Proposizioni semplici e composte)

Una proposizione si dice **semplice** (o **atomica**) se non contiene al suo interno una parte che è a sua volta una proposizione; in caso contrario si dice **composta**.

### Esempio (Proposizioni semplici)

*Carlo è ligure*

*Carlo è più alto di Mario*

*Tutti gli uomini sono mortali*

### Esempio (Proposizioni composte)

*Carlo non è ligure*

*Marcello è matematica o fisico.*

*Se manca la benzina, l'auto non parte.*

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**
- una **relazione ternaria**

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
- una **relazione binaria**
- una **relazione ternaria**
- in generale, una relazione  $n$ -aria

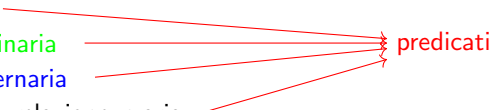


# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*  
*Marco sta leggendo*  
*Carlo è più alto di Massimo*  
*Monza ha più abitanti di Milano*  
*Dario è figlio di Ernesto e Maria*  
*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
  - una **relazione binaria**
  - una **relazione ternaria**
  - in generale, una relazione  $n$ -aria
-  **predicati**

# Proposizioni semplici del primo tipo

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Stefano è italiano*

*Marco sta leggendo*

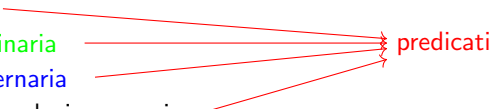
*Carlo è più alto di Massimo*

*Monza ha più abitanti di Milano*

*Dario è figlio di Ernesto e Maria*

*Marcello va a Torino con Claudia*

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
  - una **relazione binaria**
  - una **relazione ternaria**
  - in generale, una relazione  $n$ -aria
-  **predicati**

## Definizione (Proposizioni semplici del primo tipo)

Le **proposizioni semplici del primo tipo** sono proposizioni in cui un predicato ad  $n$  argomenti viene applicato ad  $n$  individui.

# Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

# Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Un individuo può figurare nelle proposizioni:

- tramite un **nome** proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una **descrizione definita** che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

## Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

*Il cane di Giovanni è fedele*

*Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe*

*$5^2 + 3$  è pari*

# Individui e termini

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Un individuo può figurare nelle proposizioni:

- tramite un **nome** proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una **descrizione definita** che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

## Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

*Il cane di Giovanni è fedele*  
*Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe*  
 *$5^2 + 3$  è pari*

In logica, nomi e descrizioni definite sono chiamati **termini**.

# Quantificatori (1)

Consideriamo queste proposizioni semplici:

*Tutti gli uomini sono mortali*  
*Vi è un italiano più alto di due metri*  
*Ogni studente universitario frequenta almeno un corso*

Contengono dei **quantificatori**: *tutti, ogni, vi è, almeno*.

Prenderemo in considerazione soltanto due quantificatori:

- **per ogni**, chiamato **quantificatore universale**, che equivale a *tutti, ogni*, etc..  
“*per ogni  $x$ , ...*” significa: tutti gli individui soddisfano ...
- **esiste**, chiamato **quantificatore esistenziale**, che equivale a *vi è, almeno*, etc..  
“*esiste  $x$  tale che ...*” significa: vi è almeno un individuo che soddisfa ...

L'uso di questi due quantificatori richiede l'introduzione di lettere come  $x, y, z, \dots$ , chiamate **variabili individuali**

## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

### Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale.*



## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

### Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale.*

*Vi è un italiano più alto di due metri*



## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

### Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale.*

*Vi è un italiano più alto di due metri*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è italiano ed  $x$  è alto più di due metri.*

## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

### Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale.*

*Vi è un italiano più alto di due metri*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è italiano ed  $x$  è alto più di due metri.*

*Ogni studente universitario frequenta almeno un corso*



## Quantificatori (2)

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

### Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

*Tutti gli uomini sono mortali*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale.*

*Vi è un italiano più alto di due metri*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è italiano ed  $x$  è alto più di due metri.*

*Ogni studente universitario frequenta almeno un corso*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è uno studente universitario, allora esiste  $y$  tale che  $y$  è un corso ed  $x$  frequenta  $y$*

# Quantificatori (3)

Alcune osservazioni.

- 1 Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori *vaghi* di cui non ci occupiamo:

*Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.  
La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.*

- 2 Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

*Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.*



# Quantificatori (3)

Alcune osservazioni.

- 1 Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori *vaghi* di cui non ci occupiamo:

*Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.  
La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.*

- 2 Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono ambigui. Ad esempio:

*Se qualcuno è buono, allora qualcuno lo ama.*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è buono esiste  $y$  tale che  $y$  ama  $x$ .*

La stessa parola “*qualcuno*” gioca due ruoli differenti da quantificatore esistenziale ed universale.

# Proposizioni semplici del secondo tipo

## Definizione

Le proposizioni semplici che iniziano con “*per ogni*” si dicono **quantificate universalmente**, quelle che iniziano con “*esiste*” si dicono **quantificate esistenzialmente**.

## Definizione (Proposizioni semplici del secondo tipo)

Le **proposizioni semplici del secondo tipo** sono le proposizioni quantificate universalmente o esistenzialmente.

# Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione “*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale*”.

La frase “ $x$  è un uomo” è una proposizione?



# Funzioni proposizionali e variabili libere

Analizziamo la proposizione “*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo, allora  $x$  è mortale*”.

La frase “ $x$  è un uomo” si chiama **funzione proposizionale**. Non è una proposizione perché il valore di verità dipende da chi è  $x$ . Il libro li chiama anche, a mio avviso impropriamente, predicati

Dalla funzione proposizionale “ $x$  e  $y$  vanno a vedere  $z$ ”, possiamo ottenere altre funzioni proposizionali rimpiazzando le variabili con termini:

- *Stefano e  $y$  vanno a vedere  $z$*
- *Stefano e  $y$  vanno a vedere il derby Milan-Inter*
- *Stefano e Marcello vanno a vedere  $z$*
- ...

Se rimpiazzo tutte le variabili ottengo una proposizione:

- *Stefano e Marcello vanno a vedere il derby Milan-Inter*

Si dice che le variabili  $x$ ,  $y$  e  $z$ , nei casi di sopra, sono **libere**.

Le funzioni proposizionali possono essere trasformate in proposizioni:

- rimpiazzando variabili con termini (slide precedente);
- usando i quantificatori.

Per esempio, da “ $x$  ama  $y$ ” otteniamo:

- *Elisa ama Massimo*
- *Esiste  $x$  tale che  $x$  ama Massimo (Vi è qualcuno che ama Massimo)*
- *Per ogni  $x$ ,  $x$  ama Massimo (Tutti amano Massimo)*
- *Per ogni  $x$ , Elisa ama  $x$  (Elisa ama tutti).*

In queste frasi, non si può rimpiazzare una variable con un nome... la frase seguente non ha alcun significato:

- *Esiste Elena tale che Elena ama Massimo*

Le variabili in questo caso si dicono **vincolate**. I quantificatori **vincolano** le variabili a cui sono applicate.

# Termini aperti

Le variabili individuali possono anche apparire all'interno di un termine. Si parla di **termini aperti**, mentre i termini senza variabili si chiamano più propriamente **chiusi**.

## Esempio (Termini aperti)

La frase “*L'autore di x*” è un termine aperto. Sostituendo  $x$  con un altro termine si ottengono le descrizioni definite:

- *L'autore della Divina Commedia*
- *L'autore della prima storia presente in Topolino n. 1374*

I termini aperti sono molto usate in matematica:  $x + 1$ ,  $2x + 5$ , sono tutti termini aperti.

## Esempio

*Il quadrato di un numero è un numero.*



*Per ogni  $x$ , se  $x$  è un numero il quadrato di  $x$  è un numero.*

Tuttavia, sono poco usati nel linguaggio comune.

Nella logica si può fare a meno di termini aperti e descrizioni definite, rimpiazzandoli con opportuni predicati.

## Esempio (Descrizioni definite e predicati)

*L'autore della Divina Commedia è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore della Divina Commedia ed  $x$  è fiorentino*

## Esempio (Termine aperti e predicati)

*L'autore di  $y$  è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore di  $y$  ed  $x$  è fiorentino*

# Termini e predicati

Nella logica si può fare a meno di termini aperti e descrizioni definite, rimpiazzandoli con opportuni predicati.

## Esempio (Descrizioni definite e predicati)

*L'autore della Divina Commedia è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore della Divina Commedia ed  $x$  è fiorentino*

## Esempio (Termine aperti e predicati)

*L'autore di  $y$  è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore di  $y$  ed  $x$  è fiorentino*

Nella logica si può fare a meno di termini aperti e descrizioni definite, rimpiazzandoli con opportuni predicati.

## Esempio (Descrizioni definite e predicati)

*L'autore della Divina Commedia è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore della Divina Commedia ed  $x$  è fiorentino*

## Esempio (Termine aperti e predicati)

*L'autore di  $y$  è fiorentino*



*Esiste  $x$  tale che  $x$  è autore di  $y$  ed  $x$  è fiorentino*