Approfondimenti di logica

Gianluca Amato

4 dicembre 2017

1 Verifica di equivalenze logiche

In questa sezione vediamo come utilizzare le tautologie notevoli che abbiamo studiato per dimostrare l'equivalenza logica di due f.p. in maniera algebrica, senza utilizzare né tabelle di verità né il metodo indiretto visto nella sezione 3.3 del libro di testo.

Ricordiamo cosa vuol dire che due f.p. sono equivalenti:

Definizione 1. Due f.p. X ed Y si dicono *equivalenti* quando hanno lo stesso valore di verità in corrispondenza di ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che compaiono in esse.

Indicheremo in maniera compatta il fatto che X ed Y sono equivalenti con $X \equiv Y$. Ad esempio, $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Attenzione al fatto che $\equiv$ non è un connettivo ed $A \wedge B \equiv B \wedge A$ non è una formula, è solo un modo compatto di scrivere "$A \wedge B$ è equivalente a $B \wedge A$".

Consideriamo adesso la f.p. $X = (B \wedge A) \wedge B$. La formula $B \wedge A$ di X è equivalente a $A \wedge B$ per la proprietà commutativa della congiunzione. Se rimpiazziamo in X la formula $B \wedge A$ con $A \wedge B$, otteniamo una f.p. equivalente:

$$(B \wedge A) \wedge B \equiv (A \wedge B) \wedge B \ .$$

A questo punto, applicando la proprietà associativa della congiunzione e la proprietà di idempotenza, otteniamo

$$(A \wedge B) \wedge B \equiv A \wedge (B \wedge B) \equiv A \wedge B \ .$$

Siamo così riusciti a semplificare la f.p. X ottenendo una nuova f.p. $(A \wedge B)$ ad essa equivalente. Possiamo generalizzare quanto fatto in questo esempio nel seguente teorema.

Teorema 1. *Sia X una f.p. ed Y un'altra f.p. contenuta in X. Se Y è equivalente a Z, possiamo rimpiazzare la Y con Z in X e la f.p. che otteniamo è equivalente ad X.*

Sfruttando questo teorema e le equivalenze note, è spesso possibile semplificare una f.p. in una equivalente più semplice. Illustriamo il procedimento con un paio di esempi.

Esempio 1. Semplificare le seguenti f.p.:

1. $\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$
2. $\neg(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Svolgimento. Per il punto 1, si ha:

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di De Morgan]} \\
&(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge della doppia negazione]} \\
&(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di idempotenza]} \\
&A \wedge \neg B
\end{aligned}$$

Per il punto 2, si ha

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge di De Morgan]} \\
&(\neg\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[legge della doppia negazione]} \\
&(A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[prop. distributiva]} \\
&(A \vee \neg B \vee A) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[prop. associativa, commutativa e idempotenza]} \\
&(A \vee \neg B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv \\
&\qquad \text{[idempotenza]} \\
&A \vee \neg B
\end{aligned}$$

□

Due tautologie notevoli che spesso è necessario utilizzare in queste semplificazioni, ma che non sono presenti sul libro di testo, sono le **leggi di assorbimento**:

$$(A \wedge B) \vee A \leftrightarrow A \qquad (A \vee B) \wedge A \leftrightarrow A$$

Inoltre, è molto importante anche il seguente seguente teorema (di immediata verifica).

Teorema 2. *Se X è una tautologia, $A \wedge X \equiv A$ ed $A \vee X$ è una tautologia. Se X è una contraddizione, $A \wedge X$ è una contraddizione e $A \vee X \equiv A$.*

Durante le operazioni di semplificazione di f.p., utilizzeremo V per indicare una qualunque tautologia ed F per indicare una qualunque contraddizione.

Esempio 2. Semplificare la seguente f.p.

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

Svolgimento.

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv$

[prop. distributiva per mettere in evidenza la A]

$A \wedge (B \vee \neg B) \equiv$

[legge del terzo escluso]

$A \wedge V \equiv$

[legge della tautologia]

A □

2 Basi di connettivi

In questa sezione vediamo più in dettaglio il concetto di *base di connettivi*, che comunque è stato già introdotto nel libro di testo nella sezione 2.2. Iniziamo con una definizione.

Definizione 2 (Base di connettivi)**.** Un insieme $\mathcal{B}$ di connettivi si dice essere una *base di connettivi* se per qualunque forma proposizionale X esiste una forma proposizionale equivalente Y che usa solo i connettivi in $\mathcal{B}$. In alternativa, possiamo anche dire che i connettivi in $\mathcal{B}$ sono *funzionalmente completi.*

Il procedimento illustrato nella sezione 2.2 ci consente di determinare, data una f.p., un'altra f.p. ad essa equivalente che utilizza solo i connettivi $\vee$, $\wedge$ e $\neg$. Questo ci consente di affermare che l'insieme $\{\vee, \wedge, \neg\}$ costituisce una base di connettivi.

In realtà, dalla legge di De Morgan, sappiamo che una f.p. del tipo $X \wedge Y$ è equivalente a $\neg(\neg X \vee \neg Y)$. Ne segue che ogni f.p. contenente solo $\vee$, $\wedge$ e $\neg$ può essere riscritta in una forma proposizionale equivalente contenente solo $\vee$ e $\neg$, utilizzando ripetutamente la legge di De Morgan. Pertanto, anche $\{\vee, \neg\}$ è una base di connettivi. Analogamente $\{\wedge, \neg\}$ è un'altra base di connettivi.

Due connettivi molto utilizzati in informatica, e poco nella logica matematica, sono il NAND e il NOR, che abbiamo visto sempre nella sezione 2.2 del libro di testo. Sebbene per questi due connettivi non esistano dei simboli universalmente riconosciuti, nel resto di queste dispense indicheremo il NAND col simbolo $\bar{\wedge}$ e il NOR col simbolo $\bar{\vee}$. Il motivo per cui questi connettivi sono molto interessanti è che sono, da soli, funzionalmente completi. Ovvero, sia l'insieme $\{\bar{\wedge}\}$ che l'insieme $\{\bar{\vee}\}$ sono due basi di connettivi.

Nel resto di questa sezione, verificheremo che $\bar{\wedge}$ è funzionalmente completo. La verifica del fatto che $\bar{\vee}$ è funzionalmente completo si può fare allo stesso modo.

2.1 Completezza funzionale del NAND

Sappiamo già che l'insieme $\{\wedge, \neg\}$ è una base di connettivi. Per verificare che $\{\bar{\wedge}\}$ è una base di connettivi, basta far vedere che qualunque f.p. che usa solo i connettivi $\wedge$ e $\neg$ può essere trasformata in una nuova f.p. che usa solo il connettivo $\bar{\wedge}$. Per far ciò, è sufficiente vedere capire trasformare le f.p. $\neg A$ e $A \wedge B$ in f.p. che utilizzano solo $\bar{\wedge}$.

Non è difficile constatare che $\neg A$ è equivalente a $A \,\bar{\wedge}\, A$ (provate a compilare le due tabelle di verità per convincervi della cosa).

D'altronde, sappiamo che $A \,\bar{\wedge}\, B \equiv \neg(A \wedge B)$. Negando ambo i membri dell'uguaglianza abbiamo $\neg(A \,\bar{\wedge}\, B) \equiv \neg\neg(A \wedge B) \equiv A \wedge B$ dove l'ultima equivalenza segue dalla legge di doppia negazione. Dunque $A \wedge B$ si può scrivere come $\neg(A \,\bar{\wedge}\, B)$, e siccome abbiamo visto come rimpiazzare il $\neg$ col $\bar{\wedge}$, abbiamo $A \wedge B \equiv \neg(A \,\bar{\wedge}\, B) \equiv (A \,\bar{\wedge}\, B) \,\bar{\wedge} (A \,\bar{\wedge}\, B)$.

3 Formalizzazione della logica dei predicati

Provvederemo in questa sezione a formalizzare in maniera precisa la logica dei predicati. In realtà, non introdurremo nessun concetto nuovo, ma rivisiteremo tutto quello visto nel capitolo 5 del libro di testo in termini più formali. Tutto quello che segue va letto dopo aver studiato le sezioni 5.1, 5.2 e 5.3 del libro di testo.

3.1 Formule ben formate

Iniziamo con una definizione precisa di cosa si intende con *formula ben formata* (fbf), concetto già introdotto informalmente nella sezione 5.2 del libro di testo. Per poter dire cosa è un fbf, occorre prima fissare una *segnatura*.

Definizione 3 (Segnatura)**.** Una segnatura per la logica dei predicati è una quadrupla $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ dove $\mathcal{C}$ è un insieme di simboli per le *costanti individuali*, $\mathcal{V}$ è un insieme <u>infinito</u> di simboli per variabili individuali, $\mathcal{P}$ è un insieme di simboli per le *costanti predicative*, ed $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ è una funzione che associa ad ogni costante predicativa un numero naturale, chiamato *arità*, che specifica il numero di individui a cui si applica un determinato predicato. Variabili e costanti individuali prendono il nome di *termini*.

Normalmente, useremo $a, b, c, \ldots$ per le costanti individuali, $x, y, z, \ldots$ per la variabili individuali e $P, Q, R, \ldots$ per le costanti predicative, più eventuali varianti ottenute aggiungendo apici e/o pedici. Tuttavia questa è solo una convenzione, e possiamo liberamente scegliere di utilizzare nomi più evocativi, soprattutto per le costanti individuali e predicative (vedremo un esempio tra un po').

Fino ad ora, non abbiamo mai fornito esplicitamente una segnatura, ma abbiamo sempre adottato la scelta convenzionale di cui sopra per costanti e variabili. Inoltre, non abbiamo prestato attenzione a specificare l'arità delle costanti predicative: d'altronde, se abbiamo usato P in una formula del tipo $P(a, b)$, abbiamo implicitamente assunto che P avesse arità due.

Tuttavia, quando vogliamo essere più formali, e quindi sicuramente in questa sezione della dispensa, dobbiamo fornire una segnatura prima di poter anche solo dire cosa è una fbf e cosa no.

Esempio 3. Una possibile segnatura per la logica dei predicati è $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ con $\mathcal{C} = \{\texttt{zero}\}$, $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$, $\mathcal{P} = \{\texttt{minore}, \texttt{succ}, \texttt{pari}\}$ ed $\mathcal{A} = \{\texttt{minore} \mapsto 2, \texttt{succ} \mapsto 2, \texttt{pari} \mapsto 2\}$. Questa segnatura verrà utilizzata in tutti gli esempi a seguire, a meno di ulteriori specificazioni. $\square$

Fissata una segnatura, possiamo dire cosa è una formula ben formata. Lo facciamo in due passi, introducendo prima il concetto di formula atomica.

Definizione 4 (Formula atomica)**.** Data una segnatura Σ, una *formula atomica* è una sequenza di simboli (una stringa, per usare una terminologia comune in informatica) della forma $\Pi(t_1, \ldots, t_n)$ dove Π è una costante predicativa di arità n, e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

Nota 1. Utilizzeremo nel seguito le seguenti *meta-variabili* (vedi discorso sul libro di testo): Π, Φ, Ψ per le costanti predicative; α, β, γ per le costanti individuali; u, v, w per le variabili individuali; r, s, t per i termini; A, B, C per le formule atomiche; X, Y, Z per le formule ben formate. State attenti quindi a non confondere, ad esempio, il simbolo x, che indica un ben precisa variabile individuale, con X che indica una qualche fbf non ben specificata.

Esempio 4. Utilizzando la segnatura, dell'esempio precedente, le seguenti sono formule atomiche: $\texttt{succ}(\texttt{zero}, x)$, $\texttt{minore}(\texttt{zero}, x)$, $\texttt{pari}(y)$.

Definizione 5 (Formula ben formata)**.** Data una segnatura Σ, una formula ben formata è una sequenza di simboli ottenibile tramite le seguenti regole:

1. ogni formula atomica è un fbf;
2. se X è una fbf, allora $(\neg X)$ è una fbf;
3. se X ed Y sono fbf, allora $(X \vee Y)$, $(X \wedge Y)$, $(X \rightarrow Y)$ e $(X \leftrightarrow Y)$ sono fbf;
4. se X è una fbf è u è una variabile individuale, allora $(\forall u X)$ e $(\exists u X)$ sono fbf.

Come abbiamo fatto per le forme proposizionali, tenderemo a omettere l'uso eccessivo di parentesi quando ciò non causa ambiguità. In questi casi, è importante tener conto delle precedenze tra operatori e delle proprietà di associatività di congiunzione e disgiunzione.

Esempio 5. Utilizzando la segnatura, dell'Esempio 3, le seguenti sono formule ben formate: $(\forall x(\texttt{minore}(\texttt{zero}, x)))$ e $(\exists x(\texttt{succ}(x, y) \wedge (\neg \texttt{pari}(x))))$. Scriveremo però, in forma più semplice, $\forall x\ \texttt{minore}(\texttt{zero}, x)$ e $\exists x(\texttt{succ}(x, y) \wedge \neg \texttt{pari}(x))$.

3.2 Variabili libere e vincolate

Sappiamo già che le *variabili libere* di una formula sono quelle variabili che compaiono nella formula senza essere quantificate. Invece, le variabili che appaiono dopo i simboli $\forall$ e $\exists$ si chiamano *variabili vincolate*.

Diamo ora una definizione più formale di questi due concetti. La cosa interessante di queste definizioni è la maniera in cui sono scritte: per definire quali sono le variabili libere di una formula complessa, ci si riconduce a calcolare le variabili libere di formule più semplici e a combinare i risultati. Definizioni di questo tipo si dicono esse date per *induzione strutturale*.

Definizione 6 (Variabili libere)**.** Data una segnatura $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$, si indica con FV (free variables) una funzione che ha come dominio l'insieme delle fbf, come codominio l'insieme delle parti di $\mathcal{V}$ (ovvero, l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathcal{V}$), e così definita:

- $FV(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = \{t_i \mid t_i \text{ è una variabile}\}$
- $FV(\neg X) = FV(X)$, $FV(X \vee Y) = FV(X) \cup FV(Y)$ (e lo stesso per gli altri connettivi binari)
- $FV(\forall u X) = FV(\exists u X) = FV(X) \setminus \{u\}$

Un elemento di $FV(X)$ si chiama *variabile libera* di X.

La prima clausola nella definizione riguarda le formule atomiche. Se X è una formula atomica, tutte le variabili che compaiono in X sono libere. La definizione nella prima clausola semplicemente raccoglie tutti i termini che sono variabili (perché alcuni termini possono essere costanti) e li mette in un insieme.

La seconda clausola determina le variabili libere di una formula composta come $X \vee Y$ mettendo assieme le variabili libere in X e quelle in Y.

Infine, le variabili libere di $FV(\forall u X)$ sono le stesse variabili libere che compaiono in X meno la variabile u che viene vincolata dal quantificatore.

Esempio 6. Vediamo un esempio di come si applica la definizione di FV ad una formula specifica: $\exists x(\texttt{minore}(y, x) \wedge \texttt{minore}(x, z))$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&FV(\exists x \exists x'(\texttt{minore}(y, x) \wedge \texttt{minore}(x, z))) = \\
&\qquad FV(\exists x'(\texttt{minore}(y, x) \wedge \texttt{minore}(x, z))) \setminus \{x\} = \\
&\qquad (FV(\texttt{minore}(y, x) \wedge \texttt{minore}(x, z)) \setminus \{x'\}) \setminus \{x\} = \\
&\qquad (FV(\texttt{minore}(y, x)) \cup FV(\texttt{minore}(x, z))) \setminus \{x, x'\} = \\
&\qquad\qquad (\{y, x\} \cup \{x, z\}) \setminus \{x, x'\} = \{y, z\} \ .
\end{aligned}$$

In maniera analoga si definisce una funzione che restituisce le variabili vincolate che sono presenti in una formula.

Definizione 7 (Variabili vincolate)**.** Data una segnatura $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$, si indica con BV (bound variables) una funzione che ha come dominio l'insieme delle fbf, come codominio l'insieme delle parti di $\mathcal{V}$ e così definita:

- $BV(\Pi(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$

- $BV(\neg X) = BV(X)$, $BV(X \vee Y) = BV(X) \cup BV(Y)$ (e lo stesso per gli altri connettivi binari)
- $BV(\forall u X) = BV(\exists u X) = BV(X) \cup \{u\}$

Un elemento di $BV(X)$ si chiama *variabile vincolata* di X.

Esempio 7. Per la stessa formula dell'esercizio precedente, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&BV(\exists x \exists x' (\texttt{minore}(y,x) \wedge \texttt{minore}(x,z))) = \\
&\qquad BV(\exists x' (\texttt{minore}(y,x) \wedge \texttt{minore}(x,z))) \cup \{x\} = \\
&\qquad BV(\texttt{minore}(y,x) \wedge \texttt{minore}(x,z)) \cup \{x'\} \cup \{x\} = \\
&\qquad BV(\texttt{minore}(y,x)) \cup BV(\texttt{minore}(x,z)) \cup \{x,x'\} = \\
&\qquad \emptyset \cup \emptyset \cup \{x,x'\} = \{x,x'\} \ .
\end{aligned}$$

Si noti che in una formula, la stessa variabile può comparire sia libera che vincolata. Ad esempio in $\texttt{pari}(x) \wedge \exists x\ \texttt{minore}(x,y)$ la variabile x appare sia libera (in $\texttt{pari}(x)$) che vincolata (in $\texttt{minore}(x,y)$).

Definizione 8 (Formule chiuse ed aperte)**.** Se X è una fbf senza variabili libere, ovvero se $FV(X) = \emptyset$, allora si dice essere una formula chiusa. Se invece contiene variabili libere, si dice aperta.

3.3 Strutture e interpretazioni

Di una fbf non si può dire in astratto se è vera o falsa se prima non si fornisce una *interpretazione*. Questa è stata definita informalmente nella sezione 5.3 del libro di testo. Componente fondamentale di una interpretazione è il concetto di *struttura*.

Definizione 9 (Struttura)**.** Una struttura $[\![\_]\!]$ per la segnatura Σ è data da:

- un insieme D detto *dominio*;
- per ogni costante individuale α, un elemento del dominio indicato con $[\![\alpha]\!]$;
- per ogni costante predicativa Π di arità n, un sottoinsieme di D^n indicato con $[\![\Pi]\!]$.

L'idea è che il dominio rappresenta l'insieme degli individui di cui parliamo. Ad ogni costante individuale viene associata un individuo specifico, mentre ad ogni costante predicativa viene associata un predicato (proprietà o relazione) sugli individui.

Qualche chiarimento lo merita il fatto che se Π è una costante predicativa di arità n, allora $[\![\Pi]\!]$ è un sottoinsieme di D^n. Consideriamo prima il caso $n = 1$. Allora $[\![\Pi]\!]$ è un sottoinsieme di D, e rappresenta l'insieme degli elementi per cui la proprietà Π vale. Se $n = 2$, $[\![\Pi]\!]$ è un insieme di coppie (d_1, d_2) dove d_1 e d_2 sono elementi di D. Queste sono le coppie per cui il predicato Π (che è un predicato binario) vale. In generale, se Π è una costante di arità n, $[\![\Pi]\!]$ sarà l'insieme delle n-ple di elementi di D che sono in relazione tra loro.

Esempio 8. Data la segnatura Σ degli esempi precedenti, consideriamo la struttura $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$ il cui dominio è $\mathbb{N}$ e tale che:

- $[\![\texttt{zero}]\!]^{\mathbb{N}} = 0$
- $[\![\texttt{pari}]\!]^{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$
- $[\![\texttt{minore}]\!]^{\mathbb{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
- $[\![\texttt{succ}]\!]^{\mathbb{N}} = \{(x, x+1) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Con le opportune modifiche, si ottengono anche $[\![\_]\!]^{\mathbb{Z}}$, $[\![\_]\!]^{\mathbb{Q}}$ ed $[\![\_]\!]^{\mathbb{R}}$ per le quali il dominio è, rispettivamente, l'insieme dei numeri interi, razionali e reali.

Anche se i nomi dei simboli evocano un ovvio significati matematico, possiamo anche pensare a strutture per la stessa segnatura che niente hanno a che fare con i numeri, quale ad esempio $[\![\_]\!]^{*}$, il cui dominio è $\{x \mid x \text{ è una regione italiana}\}$ ed è tale che:

- $[\![\texttt{zero}]\!]^{*} = \text{Abruzzo}$
- $[\![\texttt{pari}]\!]^{*} = \{x \mid x \text{ è bagnata dal mare}\}$
- $[\![\texttt{minore}]\!]^{*} = \{(x, y) \mid$ il capoluogo di regione di x è più a nord del capoluogo di regione di $y\}$
- $[\![\texttt{succ}]\!]^{*}\{(\text{Abruzzo}, \text{Toscana}), (\text{Sicilia}, \text{Umbria})\}$

Utilizzeremo più volte queste strutture nel seguito della dispensa.

Fissare una struttura non è sufficiente per assegnare un valore di verità ad una fbf, in quanto quest'ultima potrebbe contenere delle variabili libere.

Esempio 9. Anche decidendo di usare la struttura $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$, non possiamo determinare se la formula $\texttt{succ}(x, y)$ è vera o falsa, in quanto ciò dipende dai valori di x ed y. Se ad x assegniamo 2 e ad y assegniamo 3, allora la formula $\texttt{succ}(x, y)$ è vera, ma se invece ad ad x assegniamo 2 e ad y assegniamo 4, la formula $\texttt{succ}(x, y)$ sarà falsa.

Occorre pertanto aggiungere alla struttura una funzione che assegni ad ogni variabili individuale un elemento del dominio. Chiamiamo *valutazione* questa funzione.

Definizione 10 (Valutazione)**.** Data una segnatura $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ ed una struttura $[\![\_]\!]$ con dominio D, una *valutazione* è una funzione $\nu : \mathcal{V} \to D$, da variabili individuali ad elementi del dominio.

Una notazione molto utile che utilizzeremo nel seguito è quella che segue:

Definizione 11 (Aggiornamento di una valutazione)**.** Sia data una segnatura Σ e una struttura $[\![\_]\!]$. Se ν è una valutazione, u una variabile individuale e d un elemento del dominio, con $\nu[u \mapsto d]$ indichiamo una nuova valutazione che coincide con ν per tutte le variabili tranne che per u, caso nel quale restituisce d. In altri termini:

$$\nu[u \mapsto d](v) = \begin{cases} d & \text{se } u = v \\ \nu(v) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio 10. Data la solita segnatura Σ e l'interpretazione $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$, la funzione $\nu(u) = 3$ che assegna a tutte le variabili il numero 3 è una valutazione. Con $\nu[x \mapsto 2]$ si intende la valutazione che mappa tutte le variabili a 3, tranne la variabile x che viene mappata a 2.

Definizione 12 (Intepretazione dei termini)**.** Data una segnatura Σ, una struttura $[\![\_]\!]$ ed una valutazione ν, possiamo assegnare ad ogni termine t un elemento del dominio, indicato con $[\![t]\!]_\nu$, definito come segue:

$$[\![t]\!]_\nu = \begin{cases} [\![t]\!] & \text{se } t \text{ è una costante individuale,} \\ \nu(t) & \text{se } t \text{ è una variabile individuale.} \end{cases}$$

Se abbiamo a disposizione sia una struttura, sia una valutazione, possiamo assegnare un valore di verità ad ogni fbf, come segue:

Definizione 13 (Valore di verità di una fbf)**.** Data una segnatura Σ, una struttura $[\![\_]\!]$, una valutazione ν ed una fbf X, indichiamo con $[\![X]\!]_\nu$ il valore di verità di X, ottenuto come segue:

1. $[\![\Pi(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\nu = V$ se $([\![t_1]\!]_\nu, \ldots, [\![t_n]\!]_\nu) \in [\![\Pi]\!]$, altrimenti $[\![\Pi(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\nu = F$.

2. $[\![(\neg X)]\!]_\nu$, $[\![(X \vee Y)]\!]_\nu$, $[\![(X \wedge Y)]\!]_\nu$, $[\![(X \to Y)]\!]_\nu$, $[\![(X \leftrightarrow Y)]\!]_\nu$ si ottengono da $[\![X]\!]_\nu$ ed $[\![Y]\!]_\nu$ applicando le definizioni standard dei connettivi logici.

3. $[\![(\forall u X)]\!]_\nu = V$ se <u>per tutti</u> gli elementi d del dominio, si ha $[\![X]\!]_{\nu[u \mapsto d]} = V$, altrimenti $[\![\forall u X]\!]_\nu = F$;

4. $[\![(\exists u X)]\!]_\nu = V$ se <u>esiste</u> un elemento d del dominio tale che $[\![X]\!]_{\nu[u \mapsto d]} = V$, altrimenti $[\![\exists u X]\!]_\nu = F$.

Chiamiamo *intepretazione* una coppia $\mathcal{I} = ([\![\_]\!], \nu)$ dove $[\![\_]\!]$ è una struttura e ν una valutazione.

Il punto 1 della definizione di cui sopra riguarda le formule atomiche. Queste formule sono vere quando le interpretazioni dei termini sono effettivamente in relazione tra di loro secondo l'interpretazione del predicato Π.

Il punto 2 ci dice che, per interpretare i connettivi, possiamo rifarci a quanto già conosciamo dalla logica proposizionale.

Il punto 3 afferma che la formula $\forall u X$ è vera se X è vera qualunque sia l'elemento del dominio rappresentato da u. Notare che X viene controllata su tutti gli elementi del dominio, non solo su quelli che hanno una costante individuale associata. Infine, il punto 4 è simile al punto 3 ma per il quantificatore esistenziale.

Esempio 11. Consideriamo la formula $X = \forall x\ \texttt{minore}(\texttt{zero}, x)$ e la struttura $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$. In questa struttura, la formula X vuol dire "0 è minore o uguale di tutti i numeri naturali". Per verificare in dettaglio che questa "traduzione" in italiano è corretta, facciamo i conti passo passo.

Sia ν una valutazione. Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
&[\![X]\!]^{\mathbb{N}}_{\nu} = V \ \ \texttt{sse} \\
&\text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ [\![\texttt{minore}(\texttt{zero}, x)]\!]^{\mathbb{N}}_{\nu[x \mapsto d]} = V \ \ \texttt{sse} \\
&\text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ ([\![\texttt{zero}]\!]_{\nu}[x \mapsto d]^{\mathbb{N}}, [\![x]\!]_{\nu}[x \mapsto d]^{\mathbb{N}}) \in [\![\texttt{minore}]\!]^{\mathbb{N}} \text{ sse} \\
&\text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ (0, d) \in [\![\texttt{minore}]\!]^{\mathbb{N}} \text{ sse} \\
&\text{per tutti i } d \in \mathbb{N},\ 0 \leq d
\end{aligned}
$$

che vuol dire proprio "0 è minore o uguale di tutti i numeri naturali". Questa affermazione è ovviamente vera.

Si noti $[\![X]\!]^{\mathbb{N}}_{\nu} = V$ qualunque sia l'assegnamento ν. Questo perché la formula X è chiusa. Se la formula X fosse aperta, il suo valore di verità in generale dipenderebbe dalla valutazione utilizzata.

Cambiando la struttura, il valore di verità di X può cambiare. Ad esempio $[\![X]\!]^{\mathbb{Z}}_{\nu} = F$, perché sappiamo che in $\mathbb{Z}$ ci sono numeri più piccoli di 0.

Se interpretiamo la stessa formula in $[\![\_]\!]^{*}$, il significato diventa: "i capoluoghi di regione di tutte le regioni italiane sono a più a nord del capoluogo di regione dell'Abruzzo". Questa affermazione è ovviamente falsa.

Si noti che se ν e ν' sono due assegnamenti che coincidono su tutte le variabili libere di X, allora $[\![X]\!]_{\nu} = [\![X]\!]_{\nu'}$. In particolare e come già detto, se X non ha variabili libere, $[\![X]\!]_{\nu}$ non dipende affatto da ν, e possiamo scrivere semplicemente $[\![X]\!]$.

Definizione 14 (Modelli)**.** Se con l'interpretazione $\mathcal{I} = ([\![\_]\!], \nu)$ si ha $[\![X]\!]_{\nu} = V$, diciamo che $\mathcal{I}$ è un modello di X, e lo indichiamo con $\mathcal{I} \models X$.

Esempio 12. Data la struttura $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$ ed una qualunque valutazione ν, si ha che $([\![\_]\!]^{\mathbb{N}}, \nu)$ è un modello di $\forall x\ \texttt{minore}(\texttt{zero}, x)$, ovvero $([\![\_]\!]^{\mathbb{N}}, \nu) \models \forall x\ \texttt{zero} \leq x$.

Data la struttura $[\![\_]\!]^{\mathbb{N}}$, se ν è una qualunque valutazione tale che $\nu(y)$ è dispari, si ha $([\![\_]\!]^{\mathbb{N}}, \nu) \models \exists x(\texttt{succ}(x, y) \wedge \neg\texttt{pari}(x))$. Invece, se $\nu(y)$ è pari, $([\![\_]\!]^{\mathbb{N}}, \nu) \not\models \exists x(\texttt{succ}(x, y) \wedge \neg\texttt{pari}(x))$.