Esercizi di Logica Matematica

prof. Gianluca Amato

14 dicembre 2017

Quella che segue è una raccolta di esercizi di logica, la maggior parte dei quali presi dagli appelli del corso, ora disattivato, di "Matematica discreta". Talvolta il testo di questi esercizi è stato leggermente modificato per adeguarlo alle notazioni e ai programmi correnti.

Tengo a precisare che questi non sono gli unici tipi di esercizio che potranno comparire nei compiti. Piuttisto, qualunque esercizio si possa risolvere con gli strumenti appresi durante il corso potrà apparire nel compito. Questo include, in particolare, tutti gli esercizi presenti nel libro di testo per i capitoli dall'uno al cinque.

1. Determinare una forma proposizionale la cui tabella di verità corrisponda a quella seguente:

A	B	C	*
F	F	F	F
F	F	V	F
F	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	F
V	V	V	V

   Se possibile, semplificare la forma proposizionale che avete ottenuto.

2. Trovare una formula logica P che abbia la seguente tabella di verità:

A	B	P
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

   Scrivere la tabella di verità di $\neg P \land \neg A$.

3. Usare le tabelle di verità per verificare che la formula $(A \to B) \lor (A \to C)$ è equivalente a $A \to (B \lor C)$.

4. Si consideri il connettivo logico $\star$ definito come $A \star B \equiv \neg(A \land B)$. Determinare la tabella di verità del connettivo. Mostrare che questo connettivo è funzionalmente completo.

5. Determinare quali delle seguenti forme proposizionali sono tautologie:
   - $A \lor (B \to \neg A)$;
   - $A \to ((A \to B) \to B)$;
   - $(A \lor B \land (\neg C \to \neg D) \to E) \lor \neg(A \lor B \land (\neg C \to \neg D) \to E)$.

6. Usare le leggi della logica proposizionale per semplificare le seguenti forme proposizionali:

   (a) $\neg(\neg A \lor B) \lor (A \land \neg C)$.

(b) $\neg(\neg A \land B) \lor (A \land \neg C)$.

(c) $(A \land C) \lor [\neg C \land (A \lor B)]$.

7. Identificare premesse e conclusioni delle seguenti inferenze e determinarne la forma logica. Stabilire, facendo uso delle tabelle di verità, se queste inferenze sono corrette.

   (a) Jane e Pete non vinceranno entrambi il premio di matematica. Pete vincerà o il premio di matematica o quello di chimica. Jane vincerà il premio di matematica. Pertanto, Pete vincerà il premio di chimica.

   (b) La pietanza principale sarà o carne o pesce. Il contorno sarà piselli o mais. Non avremo contemporaneamente il pesce come pietanza principale e il mais come contorno. Pertanto, non avremo contemporaneamente la carne come pietanza principale e i piselli come contorno.

   (c) O John o Bill sta dicendo la verità. O Sam o Bill sta mentendo. Pertanto, John sta dicendo la verità e Sam sta mentendo.

   (d) O le vendite aumenteranno e il capo sarà contento, o le spese aumenteranno e il capo non sarà contento. Pertanto, le spese e le vendite non aumenteranno entrambe.

   (e) L'attacco riuscirà solo se il nemico è colto di sorpresa o se la posizione è poco difesa. Se il nemico ha avuto rinforzi, allora non sarà colto di sorpresa. Se la posizione è poco difesa allora il nemico non ha ricevuto rinforzi. Quindi l'attacco non riuscirà

   (f) Se Luigi ha talento e si impegna negli allenamenti, vincerà le olimpiadi o i campionati del mondo. Luigi ha talento ma non si impegna negli allenamenti. Dunque, Luigi non vincerà né le olimpiadi né i campionati del mondo.

   (g) Se farà bel tempo andremo a passeggio. Se staremo in casa giocheremo a carte. O andremo a passaggio o staremo a casa. Pertanto, o farà bel tempo o giocheremo a carte.

   (h) Le luci di emergenza si accenderanno se e soltanto se la pressione è troppo alta e la valvola di sfogo è intasata. La valvola di sfogo è intasata. Quindi, le luci di emergenza si accenderanno se e solo se la pressione è troppo alta.

   (i) Se la pressione fiscale e il tasso di disoccupazione salgono entrambi, ci sarà recessione. Se il PIL sale, allora non ci sarà recessione. Il PIL e la pressione fiscale stanno salendo entrambi. Pertanto, il tasso di disoccupazione non sta salendo.

8. L'ispettore Lestrade comunica a Sherlock Holmes: "O l'assassino è Jack, o l'assassino è John oppure Bill non dice la verità. D'altra parte, se l'assassino non è Jack, allora John è l'assassino oppure Bill dice la verità. Inoltre, John ha un alibi di ferro". Può l'investigatore far arrestare Jack? Può accusare Bill di falsa testimonianza? *(Il fatto che John abbia un alibi di ferro vuol dire che non può essere lui l'assassino).*

9. Determinare la forma logica (nella logica dei predicati) delle seguenti proposizioni.

   (a) Chiunque abbia comprato un Rolls Royce in contanti deve aver uno zio ricco.

   (b) Se qualcuno nel collegio ha il morbillo, allora chiunque ha un amico in collegio deve essere posto in quarantena.

   (c) Se nessuno ha fallito l'esame, allora chiunque ha ottenuto una A farà da tutor a qualcuno che ha ottenuto una D.

   (d) Se qualcuno può farlo, Jones lo può fare.

   (e) Se Jones lo può fare, tutti lo possono fare.

   Soluzione.

   (a) $\forall x\,(C(x) \to Z(x))$ dove $C(x)$ sta per "x ha comprato una Rolls Royce in contanti" e $Z(x)$ sta per "x ha uno zio ricco".

(b) $(\exists x\,(C(x) \wedge M(x))) \rightarrow \forall y\,(\exists x\,(C(x) \wedge A(y,x)) \rightarrow Q(y))$ dove $C(x)$ sta per "x è in collegio", $M(x)$ sta per "x ha il morbillo", $A(x,y)$ per "x è amico di y" e $Q(x)$ per "x deve essere posto in quarantena".

(c) $(\forall x\,\neg F(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow \exists y(D(y) \wedge T(x,y)))$ dove $F(x)$ sta per "x ha fallito l'esame", $A(x)$ sta per "x ha ottenuto A", $D(x)$ per "x ha ottenuto D" e $T(x,y)$ per "x farà da tutor a y".

(d) $(\exists x\,F(x)) \rightarrow F(\text{Jones})$ dove $F(x)$ sta per "x lo può fare" e Jones sta per "Jones".

(e) $F(\text{Jones}) \rightarrow \forall x\,F(x)$ con le stesse ipotesi del punto precedente.

10. Identificare premesse e conclusioni delle seguenti inferenze e determinarne la forma logica. Verificare che le inferenze sono corrette.

    (a) Sandro e Paolo amano le stesse donne. Se Sandro ama una donna, allora è felice. Sandro non è felice. Quindi Paolo non ama nessuna donna.

    (b) Carla gioca a calcio e a baseball. Non tutti gli amici di Carla giocano sia a calcio che a baseball. Tutti coloro che hanno un amico che gioca a calcio, giocano a baseball. Pertanto, Carla ha un amico che gioca a baseball ma non a calcio.

11. L'albero genealogico della famiglia SuiGeneris è un segreto gelosamente custodito. Siamo però riusciti a scoprire i seguenti fatti:

    - Michele è genitore di Giovanni o di Lucia;
    - tutti i genitori di Lucia, sono anche genitori di Michele.

    Le ultime ricerche in biologia ci consentono inoltre di affermare che

    - nessuno è genitore di se stesso.

    Formalizzare la situazione nella logica dei predicati e dimostrare che Michele è genitore di Giovanni.

    Soluzione. Consideriamo una interpretazione tale che: il dominio è l'insieme di tutte le persone; Michele, Giovanni e Lucia sono costanti individuali che indicano le corrispondenti persone; G(x,y) indica che x è genitore di y. Allora le tre proposizioni di cui sopra si possono formalizzare con le formule:

    - $G(\text{Michele}, \text{Giovanni}) \vee G(\text{Michele}, \text{Lucia})$;
    - $\forall x\,(G(x, \text{Lucia}) \rightarrow G(x, \text{Michele}))$;
    - $\forall x\,\neg G(x,x)$.

    Per dimostrare che Michele è il padre di Giovanni possiamo procedere come segue:

    (a) $G(\text{Michele}, \text{Giovanni}) \vee G(\text{Michele}, \text{Lucia})$ per ipotesti

    (b) $G(\text{Michele}, \text{Giovanni}) \vee G(\text{Michele}, \text{Lucia})$ per ipotesi

    (c) $\forall x\,\neg G(x,x)$

    (d) $\neg G(\text{Michele}, \text{Michele})$ dalla c) per eliminazione del quantificatore esistenziale;

    (e) $G(\text{Michele}, \text{Lucia}) \rightarrow G(\text{Michele}, \text{Michele})$ dalla b) per eliminazione del quantificatore esistenziale;

    (f) $G(\text{Michele}, \text{Lucia})$ da e) e d) per la regola del *modus tollens*;

    (g) $G(\text{Michele}, \text{Giovanni})$ da a) e f) per la regola del sillogismo disgiuntivo.

12. Sia data una segnatura Σ per la quale a, b, c sono simboli di costanti individuali ed R è un simbolo di predicato binario. Sia Γ l'insieme di formule $\{\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x)), \forall x R(x,x), R(a,b)\}$. Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa è conseguenza logica di Γ. Se sì, dimostrarlo con l'uso delle regole di inferenza per la logica dei predicati, altrimenti trovare una interpretazione che è modello di Γ ma non della formula in questione.

    (a) $R(b,a)$

(b) $R(b, c) \to R(a, c)$

Soluzione. La prima formula è conseguenza logica delle formule in Γ, come segue:

(a) $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$ per ipotesi

(b) $R(a, b)$ per ipotesi;

(c) $\forall y (R(a, y) \to R(y, a))$ da a) per eliminazione del quantificatore esistenziale rimpiazzando x con a;

(d) $R(a, b) \to R(b, a)$ da c) per eliminazione del quantificatore esistenziale rimpiazzando y con b;

(e) $R(b, a)$ da d) e b) per *modus ponens*.

La seconda formula, invece, non è conseguenza logica di Γ. Consideriamo la struttura $[\![\_]\!]$ così definita:

- il dominio è l'insieme $\{a, b, c\}$;
- le costanti individuali sono interpretate come loro stesse, ovvero $[\![a]\!] = a$, $[\![b]\!] = b$ ed $[\![c]\!] = c$;
- $[\![R]\!] = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$.

È facile vedere che questa struttura, assieme ad una qualunque valutazione, costituisce un modello di tutte le formule in Γ. Infatti $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$ vuol dire che la relazione R è simmetrica, ovvero se la coppia (x, y) appartiene ad $[\![R]\!]$, anche (y, x) appartiene ad $[\![R]\!]$. Questo è vero nella definizione di $[\![R]\!]$ che abbiamo dato. La formula $R(b, c) \to R(a, c)$ è falsa in questa interpretazione. Infatti $R(b, c)$ è vera perché $(b, c) \in [\![R]\!]$ mentre $R(a, c)$ è falsa perché $(a, c) \notin [\![R]\!]$.

13. Si considerino i predicati:

- padre(x,y) che è vero se e solo se x è padre di y
- madre(x,y) che è vero se e solo se x è madre di y

e scrivere le formule ben formate G(x,y), F(x,y) ed S(x) tali che

- G(x,y) è vera se e solo se x è genitore di y;
- F(x,y) è vera se e solo se x e y sono fratelli;
- S(x) è vera se e solo se x è figlio unico. **(difficile)**

Soluzione. La formula G è semplice:

- $G(x, y) = \text{padre}(x, y) \vee \text{madre}(x, y)$

Per la formula F, dobbiamo prima capire cosa si intende per fratello. Ad esempio, due persone che hanno un solo genitore in comune li consideriamo fratelli? E ancora, una essere vivente è fratello di se stesso? La cosa più semplice è rispondere sì a queste due domane, e otteniamo allora:

- $F(x, y) = \exists z\, (G(z, x) \wedge G(z, y))$

Per la formula S, i predicati padre e madre non sono sufficienti. Serve anche un predicato che ci dica quando due persone sono la stessa. Indichiamo con $U(x, y)$ il predicato "x è uguale ad y", otteniamo allora

- $S(x) = \forall z\, (F(z, x) \to U(z, x))$

che vuol dire che, se prendo una persona qualunque, se è un fratello di x allora è proprio x (quindi x non ha nessun fratello vero).