Fondamenti di Informatica

modulo di Logica Matematica

appello del 12 gennaio 2018 – prof. Gianluca Amato

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. (15 punti) Verificare se la seguente inferenza è corretta.

   Se la funzione f è continua, almeno uno tra l'insieme A e l'insieme B è vuoto. Se A è vuoto, allora f non è continua. Se B è vuoto, allora A è vuoto. Quindi, non è possibile che f sia continua.

2. (15 punti) Siano date le costanti predicative P di arità 1 e Q di arità 2 e una interpretazione $[\![\_]\!]$ tale che:

   - il dominio è l'insieme $D = \{2, 6, 7\}$;
   - P è il predicato "essere pari", ovvero $[\![P]\!] = \{x \in D \mid x \text{ è pari}\}$;
   - Q è il predicato "essere strettamente maggiore di", ovvero $[\![Q]\!] = \{(x, y) \in D^2 \mid x > y\}$.

   Per ognuna delle seguenti fbf, tenendo conto della interpretazione $[\![\_]\!]$, scrivere una proposizione in italiano corrente che corrisponda alla formula, e dire (giustificandolo) se la formula è vera o falsa.

   (a) $\exists x\, P(x)$
   (b) $\exists x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y, x))$
   (c) $\forall x\, \exists y\, Q(y, x)$
   (d) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y Q(y, x))$
   (e) $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y, x) \wedge P(y))$
   (f) $\exists x\, \forall y\, (Q(y, x) \rightarrow P(y))$

Soluzioni

1. Utilizziamo le seguente lettere proposizionali:

   - A per la proposizione "l'insieme A è vuoto"
   - B per la proposizione "l'insieme B è vuoto"
   - C per la proposizione "la funzione f è continua"

   Le proposizioni che costituiscono l'inferenza si traducono allora con le seguenti forme proposizionali:

- $\mathrm{C} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$: Se la funzione f è continua, almeno uno tra l'insieme A e l'insieme B è vuoto.
- $\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}$: Se A è vuoto, allora f non è continua.
- $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$: Se B è vuoto, allora A è vuoto.
- $\neg\mathrm{C}$: Non è possibile che f sia continua.

Dobbiamo verificare se la regola di inferenza seguente è corretta:

$$\begin{array}{c} \mathrm{C} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \\ \mathrm{A} \to \neg\mathrm{C} \\ \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ \hline \neg\mathrm{C} \end{array}$$

Possiamo farlo con una tabella di verità:

A	B	C	C → (A ∨ B)	A → ¬C	B → A	¬C
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	V	F	V	F

La regola di inferenza è corretta se nella tabella non c'è nessuna riga nella quale le ipotesi sono tutte vere e la conclusione è falsa. Ho evidenziato le righe in cui le tre ipotesi sono vere. Vediamo che in entrambe le righe evidenziate anche la conclusione è vera. Dunque **la regola di inferenza è corretta**.

1bis. È possibile usare il metodo del controesempio invece della tabella di verità. Sappiamo che la regola è corretta se la forma proposizionale seguente è una tautologia:

$$((\mathrm{C} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})) \wedge (\mathrm{A} \to \neg\mathrm{C}) \wedge (\mathrm{B} \to \mathrm{A})) \to \neg\mathrm{C} \ .$$

Se c'è un assegnamento di valori di verità alle lettere proposizionali che rende falsa la forma proposizionale (fp) di cui sopra, allora l'antecedente della fp deve essere vero e il conseguente ($\neg C$) deve essere falso. Ma se $\neg C$ è falsa allora C è vera, e siccome l'antecedente è una congiunzione, essa è vero solo se tutti i congiunti sono veri. Otteniamo allora:

$$((\underset{V}{\mathrm{C}} \underset{F}{\to} (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})) \wedge (\mathrm{A} \underset{F}{\to} \underset{F}{\neg}\underset{V}{\mathrm{C}}) \wedge (\mathrm{B} \underset{F}{\to} \mathrm{A})) \underset{F}{\to} \underset{F}{\neg}\underset{V}{\mathrm{C}}$$

Poiché il primo congiunto ($\mathrm{C} \to (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})$) è falso, ma il suo antecedente è vero, è necessario che il conseguente ($\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$) sia falso, il che richiede che sia A sia B siano falsi. Abbiamo:

$$((\underset{V}{\mathrm{C}} \underset{F}{\to} (\underset{F}{\mathrm{A}} \underset{F}{\vee} \underset{F}{\mathrm{B}})) \wedge (\underset{F}{\mathrm{A}} \underset{\boldsymbol{F}}{\to} \underset{F}{\neg}\underset{V}{\mathrm{C}}) \wedge (\underset{F}{\mathrm{B}} \underset{\boldsymbol{F}}{\to} \underset{F}{\mathrm{A}})) \underset{F}{\to} \underset{F}{\neg}\underset{V}{\mathrm{C}}$$

Vediamo adesso che c'è una contraddizione (evidenziata in grassetto) sia nel primo che nel secondo congiunto: non è possibile che queste implicazioni siano false, perché i corrispondenti antecedenti sono falsi. Dunque non è possibile che la fp sia falsa, quindi essa è una tautologia.

Notare che, se usate il metodo del controesempio, dovete dare una qualche spiegazione a parole come fatto in questo esercizio, altrimenti si ottiene solo una sfilza di V ed F dalla quale è impossibile capire se avete seguito o no in maniera corretta il procedimento.

2. Nella traduzione in italiano evito di dire che i numeri di cui parlo sono elementi dell'insieme D.

   (a) "C'è almeno un numero pari". È vero, basta prendere $x = 2$.

   (b) "Ci sono due numeri, di cui il secondo è strettamente maggiore del primo". È vero, basta prendere $x = 2$ e $y = 6$.

   (c) "Dato qualunque numero, c'è un numero strettamente maggiore di esso". È falso. Se prendiamo $x = 7$ otteniamo la frase "esiste un numero più grande di 7" che, nell'insieme D, è falso.

   (d) "Dato qualunque numero pari, c'è un numero strettamente maggiore di esso". È vero. In D ci sono due numeri pari, 2 e 6, e 7 è strettamente maggiore di entrambi.

   (e) Dato qualunque numero pari, c'è un numero pari strettamente maggiore di esso. È falso. Il numero 6 è pari, ma non c'è in D nessun numero pari strettamente maggiore di 6.

   (f) C'è un numero tale che tutti i numeri strettamente più grandi di esso sono pari. È vero. Il numero in questione è 7. Nell'insieme D, non c'è nessun numero strettamente maggiore di 7, quindi è vero che tutti i numeri strettamente maggiori di 7 sono pari.

   Se l'ultimo punto può sembrarvi oscuro, considerate la formula che si ottiene scegliendo 7 al posto di x, ovvero $\forall y\,(Q(y,7) \to P(y))$. Siccome questa formula è quantificata universalmente, è vera se e solo se tutte le istanze che ottengo rimpiazzando y con uno dei numeri in D sono vere. Siccome ci sono solo tre numeri in D, abbiamo:

   - con $y = 2$ otteniamo $Q(2,7) \to P(2)$. Questa proposizione è vera, perché l'antecente è falso.
   - con $y = 6$ otteniamo $Q(6,7) \to P(7)$. Questa proposizione è vera, perché l'antecente è falso.
   - con $y = 7$ otteniamo $Q(7,7) \to P(6)$. Questa proposizione è vera, perché l'antecente è falso.

   Dunque $\forall y\,(Q(y,7) \to P(y))$ è vera e quindi $\exists x\,\forall y\,(Q(y,x) \to P(y))$ è vera.