Matematica generale CLEII
Compito del 17 gennaio 2018

Maurizio Parton

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.
L'esercizio 1 va svolto *perfettamente* prima di passare agli altri.
In presenza di errori nell'esercizio 1 *il compito verrà considerato insufficiente.*

1. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 + 1 \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}$ tale che $\ln(x^2 + x + 1) \in \mathbb{R}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}$ tale che x è pari$\}$, determinare:
   - $(A \setminus C) \cup B$;
   - $(A \setminus C) \cap B$;
   - $\mathbb{R} \setminus (A \cap C)$;
   - $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus C)$.

   Suggerimento: aiutarsi con la rappresentazione dei numeri sulla retta reale.

2. Partendo dal grafico della funzione elementare $y = \ln(x)$, disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(-x+3) - 1$ *senza fare lo studio di funzione*. Usare poi il grafico trovato per determinare *in maniera grafica* dominio e immagine di f.

3. Disegnare il grafico della seguente funzione:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 e^x \text{ if } x > 0 \\ -x \text{ if } x \leq 0 \end{cases}$$

4. Trovare una funzione f la cui derivata f' è $(x^2 + 2x)e^x$.

5. Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 1, determinare: (a) campo d'esistenza D; (c) punti di D in cui f è continua; (d) zeri; (e) intersezioni con gli assi; (f) segno; (g) punti di D in cui f è discontinua; (h) limiti; (k) monotonia; (l) estremi locali e globali; (m) tangenti destra e sinistra in 0; (n) punti di D in cui f non è derivabile; (o) punti di flesso.

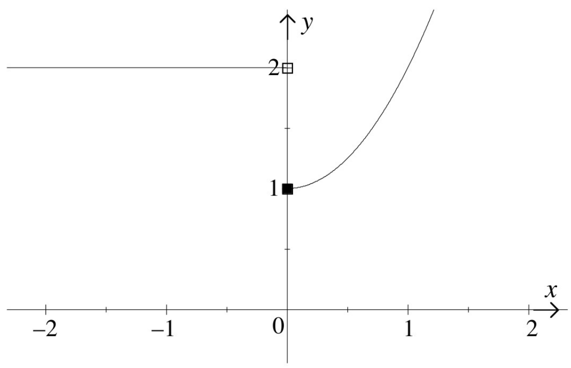

Figura 1: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

6. Si considerino il dominio in $\mathbb{R}^2$ dato da $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}$ e la funzione
$$f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 12$$
   (a) Dire se esiste un massimo e/o un minimo assoluto di f sul bordo ∂D di D, ed eventualmente trovarli.
   (b) Trovare i punti stazionari di f nei punti interni $\mathring{D}$ di D.
   (c) Calcolare la matrice Hessiana $\mathcal{H}_f(1, 0)$ di f nel punto $(1, 0)$.
   (d) Calcolare gli autovalori di $\mathcal{H}_f(1, 0)$.
   (e) Usare (6c) per dire se $(1, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella, *senza usare gli autovalori.*
   (f) Usare gli autovalori calcolati in (6d) per dire se $(1, 0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella.
   (g) Usare (a), (b), (c) e (d) per calcolare i massimi e i minimi assoluti di f nel dominio D.