Introduzione alla logica

Gianluca Amato

Logica, inferenze e proposizioni

Regole di inferenza

Esempi di regole di inferenza

Esempi di ragionameni fallaci

Logica dei predicati

Oltre il ragionamento deduttivo

Introduzione alla logica

prof. Gianluca Amato

Modulo di “Logica”
Insegnamento di “Fondamenti di Informatica“
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l’Impresa
a.a. 2023/24

19 ottobre 2023

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionameni fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Cos'è la logica

Definizione (Logica)

La logica (dal greco *logos*, ovvero "parola", "pensiero") è lo studio del ragionamento.

Esempio (Esempi di ragionamento)

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
Dunque Socrate è mortale.

Ogni numero intero è o pari o dispari
Il numero intero 3 non è pari
Dunque 3 è dispari.

Sono ragionamenti corretti?

Nota

Esistono varie forme di ragionamento, qui siamo interessati al ragionamento deduttivo.

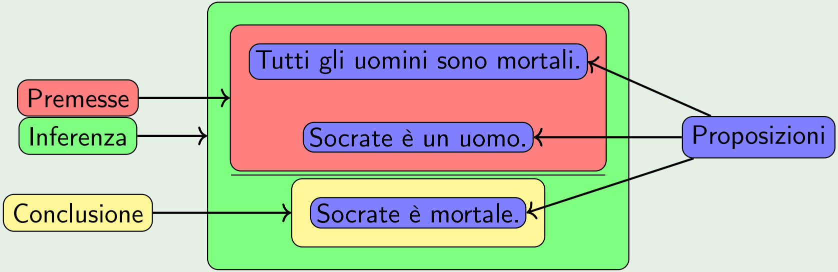
Inferenze

La forma principale del ragionamento è quella dell'inferenza.

Definizione (Inferenza)

Una inferenza è una sequenza di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle rimanenti, che si assumono come premesse.

Esempio



Proposizioni

Definizione (Proposizione)

Una proposizione è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓ o no? ✗)

- Elisa ama Massimo ✓
- Elisa ama Massimo? ✗ (è una domanda)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓ (è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una descrizione)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina! ✗ (è un ordine)
- Quel ramo del lago di Como che volge a mezzogiorno ✗ (è una descrizione)

Valori di verità

Definizione (Principio di bivalenza)

Una proposizione può assumere uno e uno solo dei due valori di verità:

- vero (V), oppure true in inglese (T)
- falso (F), oppure false in inglese (F)

Nella vita quotidiana, questo principio non sempre si applica:

- è quasi certo che ...
- è probabile che ...
- sono abbastanza sicuro che ...

La logica si occupa anche dei casi in cui il principio di bivalenza non vale, ma non lo faremo in questo corso.

Inferenze corrette

Definizione (Inferenza corretta)

Una inferenza è corretta (o valida) se ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Esempio (Inferenza corretta)

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Carlo è ligure o Stefano è piemontese}\\ \textit{Stefano non è piemontese}\end{array}}{\textit{Carlo è ligure}}$$

Nota

In alternativa, possiamo dire che l'inferenza è corretta quando è impossibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa.

Inferenze e contesto

Non si considerano corrette inferenze che dipendono dalla conoscenza del contesto.

Esempio (Inferenza non corretta)

$$\frac{\textit{Marco è pescarese}}{\textit{Marco è abruzzese}}$$

dipende dal significato di pescarese e abruzzese

La si può rendere corretta esplicitando le assunzioni di fondo:

Esempio (Inferenza corretta)

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Marco è pescarese}\\ \textit{Tutti i pescaresi sono abruzzesi}\end{array}}{\textit{Marco è abruzzese}}$$

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni
2 Regole di inferenza
3 Esempi di regole di inferenza
4 Esempi di ragionameni fallaci
5 Logica dei predicati
6 Oltre il ragionamento deduttivo

Inferenze e struttura sintattica

Se rimpiazziamo “Carlo è ligure” e “Stefano è piemontese” con altre proposizioni, otteniamo altre inferenze corrette: quella che importa è solo la struttura sintattica delle proposizioni, chiamata forma logica.

Esempio

$$\frac{\textit{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \qquad \textit{Stefano non è piemontese}}{\textit{Carlo è ligure}}$$

$$\frac{\textit{Il maggiordomo è colpevole o la cameriera è colpevole.} \qquad \textit{La cameriera non è colpevole}}{\textit{Il maggiordomo è colpevole}}$$

$$\frac{\textit{Due buchi neri si sono scontrati, o il rivelatore di onde gravitazionali è rotto.} \qquad \textit{Il rivelatore di onde gravitazionali non è rotto.}}{\textit{Due buchi neri si sono scontrati.}}$$

Regole di inferenza

Mettiamo in evidenza la forma logica dell'inferenza.

- usiamo delle lettere proposizionali, al posto delle proposizioni;
- lasciamo invariante parole chiavi come "o" e "non", chiamate connettivi.

Esempio (Forma logica)

Se si pone A="*Carlo è ligure*" e B="*Stefano è piemontese*":

Regola di inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Carlo è ligure o Stefano è piemontese}\\ \textit{Stefano non è piemontese}\end{array}}{\textit{Carlo è ligure}} \longrightarrow \frac{\begin{array}{c}A \text{ o } B\\ \text{non } B\end{array}}{A}$$

Definizione (Regola di inferenza)

Una inferenza in cui usiamo lettere proposizionali invece di proposizioni vere e proprie prende il nome di regola di inferenza.

Regole di inferenza corrette

Una regola di inferenza rappresenta tutte le inferenze che si possono ottenere rimpiazzando le lettere proposizionali con delle proposizioni.

- le inferenze ottenute in questo modo si chiamano istanze della regola;
- se una regola è corretta, tutte le istanze lo sono.

Esempio

La regola di inferenza

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ o } B \\ \text{non } B \end{array}}{A}$$

chiamata regola del sillogismo disgiuntivo è corretta, quindi la sua istanza

$$\frac{\begin{array}{c} \textit{Il maggiordomo è colpevole o la cameriera è colpevole.} \\ \textit{La cameriera non è colpevole} \end{array}}{\textit{Il maggiordomo è colpevole}}$$

è corretta.

Inferenze corrette e verità delle conclusioni

Bisogna distinguere la correttezza della inferenze dalla verità della conclusione!

Consideriamo alcune istanze della regola vista prima:

$$\begin{array}{c} A \text{ o } B \\ \text{non } B \\ \hline A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textit{3 è primo o 3 è pari } (\checkmark) \\ \textit{3 non è pari } (\checkmark) \\ \hline \textit{3 è primo } (\checkmark) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textit{3 è pari o 3 è primo } (\checkmark) \\ \textit{3 non è primo } (\text{✗}) \\ \hline \textit{3 è pari } (\text{✗}) \end{array}$$

$$\cancel{\begin{array}{c} ????????????????? \ (\checkmark) \\ ????????????????? \ (\checkmark) \\ \hline ????????????????? \ (\text{✗}) \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} \textit{3 è dispari o 3 è primo } (\checkmark) \\ \textit{3 non è primo } (\text{✗}) \\ \hline \textit{3 è dispari } (\checkmark) \end{array}$$

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionameni fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Un'altra regola corretta: modus ponens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese}\\ \textit{Fabio è pescarese}\end{array}}{\textit{Fabio è abruzzese}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se } A \textit{ allora } B\\ A\end{array}}{B}$$

detta regola del modus ponens. Vedi anche:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se sono colpevole devo essere punito}\\ \textit{Sono colpevole}\end{array}}{\textit{Devo essere punito}}$$

Un'altra regola corretta: modus tollens

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese}\\ \textit{Fabio non è abruzzese}\end{array}}{\textit{Fabio non è pescarese}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se } A \textit{ allora } B\\ \textit{non } B\end{array}}{\textit{non } A}$$

detta regola del modus tollens. Vedi anche:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se sono colpevole devo essere punito}\\ \textit{Non devo essere punito}\end{array}}{\textit{Non sono colpevole}}$$

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionameni fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Fallacia della negazione dell'antecedente (1)

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se sono un ladro allora devo essere punito}\\ \textit{Non sono un ladro}\end{array}}{\textit{Non devo essere punito}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se } A \textit{ allora } B\\ \textit{non } A\end{array}}{\textit{non } B}$$

È corretta?

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se Fabio è pecarese, allora Fabio è abruzzese } \checkmark \\ \textit{Fabio non è pescarese } \checkmark\end{array}}{\textit{Fabio non è abruzzese } \text{✗}}$$

È corretta?

Questa regola è falsa: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un controesempio. L'inferenza non è corretta.

Ed infatti, se ci pensiamo bene, non è corretta neanche la prima regola di inferenza: magari non sono un ladro, ma devo essere punito per qualche altro motivo.

Fallacia dell'affermazione del conseguente (1)

Consideriamo questa inferenza...

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se manca la benzina, allora l'auto non parte}\\ \textit{L'auto non parte}\end{array}}{\textit{Manca la benzina}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Se } A \textit{ allora } B\\ B\end{array}}{A}$$

È corretta?

Fallacia della affermazione del conseguente (2)

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \qquad \textit{Fabio è abruzzese}}{\textit{Fabio è pescarese}}$$

È corretta?

Questa regola è falsa: pensate di nuovo al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un controesempio. L'inferenza non è corretta.

Ed infatti, se ci pensiamo bene, non è corretta neanche la prima regola di inferenza: magari l'auto non parte perché è scarica la batteria.

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionameni fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Inferenze a livello predicativo

Negli esempi visti prima, le regole di inferenza sono a livello di logica proposizionale: la loro verità dipende dai legami tra le proposizioni.

Queste inferenze sono più complesse:

$$\frac{\textit{Napoleone è corso} \quad \textit{Tutti i corsi sono francesi}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\textit{Socrate è un uomo} \quad \textit{Tutti gli uomini sono mortali}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

Se analizzate come fatto fin'ora, corrispondo alla regola di inferenza:

$$\frac{A \quad B}{C}$$

che non è corretta! Bisogna passare alla logica dei predicati.

Forma logica per regole di inferenza a livello predicativo

A livello predicativo, la forma logica si ottiene in questo modo:

- costanti individuali al posto di individui (Napoleone, Socrate)
- costanti predicative al posto di proprietà (essere corso, essere mortale);
- esiste o per ogni al posto dei quantificatori (tutti, alcuni, ...)

$$\frac{\textit{Napoleone è corso} \qquad \textit{Tutti i corsi sono francesi}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\textit{Socrate è un uomo} \qquad \textit{Tutti gli uomini sono mortali}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P\,a \qquad \textit{per ogni}\ x, \textit{se}\ P\,x\ \textit{allora}\ Q\,x}{Q\,a}$$

Inferenze corrette e verità delle conclusioni

Come per il caso proposizionale, bisogna distinguere tra correttezza dell'inferenza e verità della conclusione.

Napoleone è francese ✓
Tutti i francesi sono abruzzesi ✗

Napoleone è abruzzese ✗

Napoleone è francese ✓
Tutti i francesi sono corsi ✗

Napoleone è corso ✓

Napoleone è genovese ✗
Tutti i genovesi sono cinesi ✗

Napoleone è cinese ✗

Napoleone è cinese ✗
Tutti i cinesi sono francesi ✗

Napoleone è francese ✓

Napoleone è londinese ✗
Tutti i londinesi sono inglesi ✓

Napoleone è inglese ✗

Napoleone è parigino ✗
Tutti i parigini sono francesi ✓

Napoleone è francese ✓

~~??????????????????~~ ✓
~~??????????????????~~ ✓

~~??????????????????~~ ✗

Napoleone è corso ✓
Tutti i corsi sono francesi ✓

Napoleone è francese ✓

Contenuti

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionameni fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Ragionamento induttivo e abduttivo

Esistono altre forme di “ragionamento”, oltre a quello deduttivo visto finora.

Ragionamento induttivo: dal caso particolare al generale

$$\frac{\textit{Tutti i corvi finora osservati sono neri}}{\textit{Tutti i corvi sono neri}}$$

Ragionamento abduttivo: introduzione di ipotesi esplicative

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{L'assassino ha lasciato tracce di fango}\\ \textit{Chiunque fosse entrato dal giardino, avrebbe lasciato tracce di fango}\end{array}}{\textit{L'assassino è entrato dal giardino}}$$

Nota

Dal punto di visto deduttivo, l’ultima inferenze è propria quella che abbiamo chiamato “fallacia dell’affermazione del conseguente”.

Inferenze e monotònia

- Ragionamenti induttivi e abduttivi non sono monotòni: nuove premesse possono trasformare la conclusione del ragionamento.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{L'assassino ha lasciato tracce di fango}\\ \textit{Chiunque fosse entrato dal giardino, avrebbe lasciato tracce di fango}\\ \textit{Un uomo è stato visto imbrattare appositamente le scarpe di fango}\end{array}}{\textit{L'assassino non è entrato dal giardino}}$$

- Invece il ragionamento deduttivio è monotòno: se aggiungo nuove premesse, un'inferenza rimane corretta. Per questo il ragionamento deduttivo è il meccanismo principale delle dimostrazioni matematiche.
  - si parte da proposizioni assunte vere per principio;
    - gli assiomi di Euclide
    - gli assiomi dei numeri reali
  - se applicano inferenze corrette a premesse corrette per ottenere conclusioni corrette (teoremi)
  - in questo modo il teorema sarà vero per sempre:

https://youtu.be/LlED5V7EuFY?si=40FmAOQ4491dCbVQ&t=313

L'esempio di Charles S. Peirce (1839-1914)

$$\frac{\textit{Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi} \quad \textit{Questi fagioli vengono da questo sacchetto}}{\textit{Questi fagioli sono bianchi}}$$

Deduzione

$$\frac{\textit{Questi fagioli vengono da questo sacchetto} \quad \textit{Questi fagioli sono bianchi}}{\textit{Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi}}$$

Induzione

$$\frac{\textit{Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi} \quad \textit{Questi fagioli sono bianchi}}{\textit{Questi fagioli vengono da questo sacchetto}}$$

Abduzione