

Fondamenti di Informatica

modulo di Logica Matematica

prova parziale del 26 novembre 2018 – prof. Gianluca Amato

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. (11 punti) Tradurre in forma logica (logica proposizionale) la seguente inferenza, e determinare se è corretta usando il vostro metodo preferito.

Pikachu è un Pokémon elettrico. Se Raichu non è un Pokémon elettrico, non lo è neanche Pikachu. Uno tra Raichu ed Eevee è un Pokémon elettrico. Dunque, Eevee non è un Pokémon elettrico.

2. (11 punti) Tradurre in forma logica le seguenti affermazioni.
 - (a) Raichu è una evoluzione di Pikachu
 - (b) Pikachu non è evoluzione di altri Pokémon
 - (c) Nessun Pokémon si evolve in se stesso
 - (d) Esiste almeno un Pokémon che non si evolve
 - (e) Esiste almeno un Pokémon con una sola evoluzione
 - (f) Esiste almeno un Pokémon con due o più evoluzioni
 - (g) Due Pokémon diversi non possono evolversi nello stesso Pokémon
 - (h) Tutti i Pokémon o si evolvono in altri Pokémon oppure sono evoluzione di altri Pokémon.
3. (10 punti) Dare una interpretazione che renda vere tutte le formule ben formate determinate al punto 2.
4. (2 punti) Verificare, fornendo una specifica interpretazione, che la proposizione “Pikachu ha almeno due evoluzioni” non è conseguenza logica delle altre proposizioni del punto 2.

Soluzione

Si precisa che la soluzione che segue è solo una tra le molteplici possibili soluzioni corrette.

- Indicando con P la proposizione “Pikachu è un Pokémon elettrico”, con R la proposizione “Raichu è un Pokémon elettrico” e con E la proposizione “Eevee è un Pokémon elettrico”, otteniamo

- Pikachu è un Pokémon elettrico $\equiv P$
- Se Raichu non è un Pokémon elettrico, non lo è neanche Pikachu $\equiv \neg R \rightarrow \neg P$
- Uno tra Raichu ed Eevee è un Pokémon elettrico $\equiv R \vee E$
- Eevee non è un Pokémon elettrico $\equiv \neg E$

Per dimostrare che la regola di inferenza è corretta, costruiamo una tabella di verità

P	R	E	$\neg R \rightarrow \neg P$	$R \vee E$	P	$\neg E$
F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F
V	V	V	V	V	V	V

Le linee con sfondo grigio sono quelle in cui tutte le premesse sono vere. Poiché nella penultima riga le premesse sono vere ma la conseguenza è falsa, l’inferenza **non** è corretta.

- Indichiamo con Exy la proposizione “ x è evoluzione di y ” e con p, r rispettivamente Pikachu e Raichu. Possiamo assumere che l’universo del discorso sia l’insieme di tutti Pokémon, così evitiamo di dover aggiungere un predicato per indicare se un individuo è un Pokémon oppure no. Chiaramente “ x si evolve in y ” è un modo diverso di dire “ y è evoluzione di x ”, per cui lo indichiamo con Eyx . Otteniamo:

- Erp
- $\forall x \neg Epx$
- $\forall x \neg Exx$
- $\exists x \forall y \neg Eyx$
- $\exists x \exists y (Eyx \wedge \forall z (Ezx \rightarrow z = y))$
- $\exists x \exists y \exists z (Eyx \wedge Ezz \wedge z \neq y)$
- $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg \exists z (Ezx \wedge Ezy))$
- $\forall x (\exists y Eyx \vee \exists z Exz)$

- Dato il dominio $D = \{1, 2, 3, 4\}$, definiamo

- $\llbracket p \rrbracket = 1$
- $\llbracket r \rrbracket = 2$
- $\llbracket E \rrbracket = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$

Spiegazione. Assegniamo a p ed r due numeri naturali distinti (2 ed 1) e leghiamoli nella relazione E in modo che 2 (Raichu) sia evoluzione di 1 (Pikachu). Aggiungiamo poi il Pokémon 3 e rendiamolo evoluzione di 1 in modo da soddisfare la proposizione (f). Le altre proposizioni sono tutte soddisfatte tranne la (e), perché 1 ha due evoluzioni mentre 2 e 3 non ne hanno nessuna. Aggiungiamo quindi un altro Pokémon, il 4, e lo rendiamo evoluzione di 2, cosicché 2 abbia una sola evoluzione.

4. È sufficiente trovare una interpretazione che rende vere tutte le proposizioni del punto 2 ma non quella del punto 4. Un Pokémon con due evoluzioni serve che ci sia per soddisfare la (e), ma non è detto che sia l'1 (Pikachu). In questa interpretazione alternativa, è 2 (Raichu) ad avere due evoluzioni, mentre Pikachu ne ha una sola:

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\llbracket p \rrbracket = 1$
- $\llbracket r \rrbracket = 2$
- $\llbracket E \rrbracket = \{(2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$