# Fondamenti di Informatica

## modulo di Logica Matematica

prova parziale del 17 dicembre 2019 – primo turno
prof. Gianluca Amato

**Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.**

1. (11 punti) Tradurre in forma logica (proposizionale) la seguente inferenza, e determinare se è corretta usando un metodo a scelta.

   Il mondo si libererà dalla minaccia di Voldemort se e solo se gli horcrux verranno distrutti e Voldemort sarà sconfitto. Se la missione di Harry Potter avrà successo, gli horcrux verranno distrutti. Dunque, o la missione di Harry Potter avrà successo, oppure il mondo non si libererà dalla minaccia di Voldemort, ma non entrambi.

2. (6 punti) Semplificare le seguenti forme proposizionali usando le equivalenze logiche note.

   (a) $\neg(A \land \neg(\neg A \lor B))$

   (b) $(A \land B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land C)$

3. (11 punti) Individuare predicati e individui che compaiono nelle seguenti proposizioni, fissare le corrispondenti costanti predicative e individuali, e tradurre le proposizioni in forma logica (predicativa).

   (a) Harry Potter è esperto di difesa contro le arti oscure.

   (b) Chiunque sia esperto di difesa contro le arti oscure o è amico di Voldemort o è un suo nemico.

   (c) Se una persona è amica di un'altra, la seconda è amica della prima.

   (d) Nessuno degli amici di Harry Potter è anche amico di Voldemort.

   (e) Tutti hanno almeno un amico esperto di difesa contro le arti oscure.

4. (5 punti) Specificare una struttura che renda vere tutte le formule ben formate determinate al punto 3 e il cui dominio contenga almeno quattro elementi.

# Soluzioni

> Per distinguere la soluzione vera e propria da ulteriori commenti che farò a fini didattici ma che non mi aspetto di trovare nel compito, metterò i commenti in una cornice, esattamente come avviene in questo paragrafo.

## Esercizio 1

Indico con $A$, $B$, $C$ e $D$ le seguenti proposizioni elementari:

- $A$ = “Il mondo si libererà dalla minaccia di Voldemort”
- $B$ = “Gli horcrux verranno distrutti”
- $C$ = “Voldemort sarà sconfitto”
- $D$ = “La missione di Harry Potter avrà successo”

L’inferenza di cui all’esercizio 1 è quindi una istanza della seguente regola di inferenza:

$$\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \wedge C \\ D \rightarrow B \\ \hline D \veebar \neg A \end{array}$$

> La dicitura “ma non entrambi” indica che nella conclusione dell’inferenza abbiamo una “o” esclusiva, per la quale usiamo il simbolo $\veebar$. In alternativa, possiamo usare i connettivi standard e riscrivere la conclusione come $(D \vee A) \wedge \neg(D \wedge A)$. Possiamo procedere in due modi per risolvere l’esercizio: con il metodo indiretto (ricerca del controesempio) o con le tabelle di verità. Li presento entrambi, ma nel compito è sufficiente utilizzare uno dei due.

### Metodo indiretto

La regola di inferenza di cui sopra è corretta se e solo se la forma proposizionale $P = (A \leftrightarrow B \wedge C) \wedge (D \rightarrow B) \rightarrow (D \veebar \neg A)$ è una tautologia. Con il metodo indiretto proviamo a trovare un controesempio, ovvero un assegnamento di valori di verità che rende falsa la forma proposizionale.

| | | ( | $A$ | $\leftrightarrow$ | $B$ | $\wedge$ | $C$ | ) | $\wedge$ | ( | $D$ | $\rightarrow$ | $B$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $D$ | $\veebar$ | $\neg$ | $A$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a)$ | | | | | | | | | | | | | | $F$ | | | | | | |
| | $b)$ | | | | | | | | $V$ | | | | | | $F$ | | | $F$ | | | |
| | $c)$ | | | $V$ | | | | | $V$ | | | $V$ | | | $F$ | | | $F$ | | | |
| caso 1 | $d)$ | | | $V$ | | | | | $V$ | | | $V$ | | | $F$ | | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | |
| | $e)$ | | $F$ | $V$ | | | | | $V$ | | $V$ | $V$ | | | $F$ | | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | |
| | $f)$ | | $F$ | $V$ | | $F$ | | | $V$ | | $V$ | $V$ | $V$ | | $F$ | | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | |
| | $g)$ | | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | | | $V$ | | $V$ | $V$ | $V$ | | $F$ | | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | |
| | $h)$ | | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | | $V$ | | $V$ | $V$ | $V$ | | $F$ | | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | |

Nella riga $e$, siccome ci sono due possibilità con cui $D \veebar \neg A$ può essere falsa, scegliamo il caso in cui sia $D$ che $\neg A$ sono vere, e quindi $A$ è falsa. Alla fine, otteniamo un’assegnamento non contraddittorio di valori di verità alle lettere $A, B, C, D$ che rende la forma proposizionale $P$ falsa. Dunque $P$ non è una tautologia e la regola di inferenza (e l'inferenza stessa) non è corretta.

Una spiegazione come sopra è sufficiente nel compito. Tuttavia, per completezza, aggiungo un commento per tutte le righe della derivazione del controesempio.

a) poiché cerco un contoesempio, fisso ad F il valore di verità del connettivo principale di $P$;

b) siccome l'implicazione di cui al punto a) è falsa, allora il suo antecedente è vero e il suo conseguente è falso;

c) siccome la congiunzione delle due ipotesi nell'antecedente è vera, entrambe le ipotesi sono vere;

d) non riuscendo a propagare ulteriormente le informazioni, decido di provare con il caso in cui $D$ vero e $\neg A$ vero; avrei potuto provare anche il caso $D$ falso ed $A$ falso, ma avrei trovato una contraddizione e quindi sarei stato comunque costretto a considerare questo caso;

e) copio i valori di verità di $A$ e $D$ nelle rispettive colonne;

f) siccome la doppia implicazione è vera ed A è falsa, anche $B \wedge C$ è falsa; siccome $D \to B$ è vera e $D$ è vera, allora anche $B$ è vera;

g) copio il valore di verità di $B$ nella colonna corrispondente in $B \wedge C$;

h) siccome $B \wedge C$ è falsa ma $D$ è vera, allora $C$ è falsa.

### Metodo con le tabelle di verità

Costruisco una tabella di verità con le forme proposizionali che compaiono nella regola di inferenza.

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $B \wedge C$ | $A \leftrightarrow B \wedge C$ | $D \to B$ | $\neg A$ | $D \veebar \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |

Sono marcate in rosso le righe in cui entrambe le premesse sono vere. Tra queste righe ce ne sono un paio (la quarta e la penultima) nelle quali la conclusione è falsa. Pertanto, la regola di inferenza non è corretta.

## Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
&\neg(A \land \neg(\neg A \lor B)) && \text{De Morgan}\\
&\equiv \neg(A \land (\neg\neg A \land \neg B)) && \text{Doppia negazione}\\
&\equiv \neg(A \land (A \land \neg B)) && \text{Proprietà associativa}\\
&\equiv \neg((A \land A) \land \neg B) && \text{Idempotenza di } \land\\
&\equiv \neg(A \land \neg B) && \text{De Morgan}\\
&\equiv \neg A \lor \neg\neg B && \text{Doppia negazione}\\
&\equiv \neg A \lor B && \text{Definizione di implicazione}\\
&\equiv A \to B &&
\end{aligned}
$$

> Qualche passaggio di quelli di sopra può anche essere omesso. Inoltre, sarebbe possibile accorgersi già in $\neg(A \land \neg B)$ che siamo di fronte ad una implicazione.

$$
\begin{aligned}
&(A \land B \land C) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land C) && \text{Proprietà distributiva}\\
&\equiv A \land ((B \land C) \lor (B \land \neg C) \lor (\neg B \land C)) && \text{Proprietà distributiva}\\
&\equiv A \land ((B \land (C \lor \neg C)) \lor (\neg B \land C)) && \text{Terzo escluso}\\
&\equiv A \land ((B \land T) \lor (\neg B \land C)) && \text{Elemento neutro di } \land\\
&\equiv A \land (B \lor (\neg B \land C)) && \text{Proprietà distributiva}\\
&\equiv A \land ((B \lor \neg B) \land (B \lor C)) && \text{Terzo escluso}\\
&\equiv A \land (T \land (B \lor C)) && \text{Elemento neutro di } \land\\
&\equiv A \land (B \lor C) &&
\end{aligned}
$$

> Si noti che nelle prime due equivalenze la proprietà distributiva viene utilizzata per "mettere in evidenza" prima $A$ e poi $B$. Invece, l'ultimo utilizzo della proprietà distributiva è, appunto, per distribuire $B$ nei confronti di $\neg B \land C$.

## Esercizio 3

Usiamo le seguenti costanti predicative:

- $O/1$ per il predicato $Ox \equiv$ "$x$ è esperto di difesa contro le arti oscure";
- $A/2$ per il predicato $Axy \equiv$ "$x$ è amico di $y$";
- $N/2$ per il predicato $Nxy \equiv$ "$x$ è nemico di $y$";

e individuali:

- $h$ per "Harry Potter";
- $v$ per "Voldemort".

Le proposizioni vengono allora tradotte nelle seguenti fbf:

a) $Oh$

b) $\forall x(Ox \to Axv \veebar Nxv)$

c) $\forall x \forall y(Axy \to Ayx)$

d) $\forall x(Axh \to \neg Axv)$

e) $\forall x \exists y(Axy \wedge Oy)$

Alcune note sulle traduzioni.

- Nella proposizione $b$), la frase "o è amico di Voldemort o è un suo nemico" potrebbe essere anche interpretata in senso inclusivo. Andrebbe bene comunque.
- Nella proposizione $c$) entrambe $x$ e $y$ vanno quantificate universalmente. Anche se nella frase in italiano compare la parola "una" (sia da sola che in "un'altra"), in entrambi i casi essa sta per "chiunque". Il significato della frase è che se prendo due persone qualunque nel mondo e la prima è amica della seconda, allora la seconda è amica della prima.
- La proposizione $d$) si potrebbe anche scrivere come $\neg \exists x(Axh \wedge Axv)$.
- Nella correzione del compito non sono state pignolo con le parentesi dopo i quantificatori, ma sarebbero necessarie. Ad esempio, se scrivessi la fbf $\forall x\,(Axh \veebar Nxh)$ senza parentesi, cioè $\forall x\, Axh \veebar Nxh$, a seguito della priorità standard di quantificatori e connettivi essa sarebbe da interpretare come $(\forall x Axh) \veebar Nxh$, che non è neanche una formula chiusa.

## Esercizio 4

Tra tutti gli esercizi, questo è quello che può essere risolto in più modi, completamente diversi l'uno dall'altro. Non pensate quindi di avere sbagliato solo perché la vostra soluzione è diversa.

Sia $D = \{1, 2, 3, 4\}$ il dominio della nostra struttura $\mathcal{I}$. Interpretiamo le costanti predicative e individuali come segue:

- $\mathcal{I}(h) = 1$.
- $\mathcal{I}(v) = 2$.
- $\mathcal{I}(O) = \{1, 2\}$.
- $\mathcal{I}(A) = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 1), (2, 2)\}$.
- $\mathcal{I}(N) = \{(1, 2)\}$

La struttura $\mathcal{I}$ rende vere le fbf di cui all'esercizio 3 perché:

a) L'elemento 1 (che corrisponde ad $h$) è in $I(O)$;

b) Ci sono due elementi del dominio che godono della proprietà $O$ e che quindi soddisfano l'antecedente dell'implicazione: 1 e 2. Questi due elementi soddisfano anche il conseguente dell'implicazione. Infatti, se $x = 1$ allora $Nxv$ è vero e $Axv$ è falso, mentre se $x = 2$ allora $Axv$ è vero e $Nxv$ è falso. Per tutti gli altri valori di $x$ l'implicazione è vera semplicemente perché è falso l'antecedente.

c) Questa fbf vuol dire che se in $\mathcal{I}(A)$ c'è una coppia $(x, y)$, deve esserci anche la coppia $(y, x)$. È facile vedere che è proprio così.

d) L'antecedente dell'implicazione è vera per $x = 1$ e per $x = 3$. Nè 1 nè 3 sono in relazione $A$ con 2, per cui in entrambi i casi il conseguente è vero, e quindi l'implicazione è vera. Per tutti gli altri $x$ del dominio l'implicazione è vera semplicemente perché il suo antecedente è falso.

e) Se $x = 1$ la $y$ che soddisfa la proposizione $Axy \land Oy$ è lo stesso 1. Se $x = 2$ scegliamo $y = 2$. Se $x = 3$ scegliamo $y = 1$. Infine, se $x = 4$, si può scegliere $y = 2$.

> Nelle spiegazioni qui sopra si può essere più o meno formali di quanto ho scritto io. Ad esempio, una versione più formale della spiegazione relativa alla fbf a) potrebbe essere: "$I(h) \in I(O)$". Una spiegazione meno formale potrebbe essere: "Harry Potter (1) è esperto di difesa contro le arti oscure perché sta in $O$". Entrambe sono accettabili.