Conseguenza logica

prof. Gianluca Amato

20 novembre 2024

Siamo giunti alla fine del nostro viaggio nella logica proposizionale. Abbiamo finalmente tutte le conoscenze necessarie per determinare in maniera precisa quali regole di inferenza sono corrette e quali no.

Contenuti

Conseguenza logica (1)

Ripasso: equivalenza logica

Due fp X ed Y sono equivalenti ($X \equiv Y$) quando hanno lo stesso valore di verità per ogni assegnamento di verità alle variabili proposizionali.

La conseguenza logica è una forma più debole dell'equivalenza.

Definizione (Conseguenza logica)

Una fp Y è conseguenza logica della fp X quando tutti gli assegnamenti di lettere a valori di verità che rendono vera X rendono vera anche Y.

Pertanto, se X è vera deve essere vera anche Y, ma non è detto il viceversa!

Definizione (Simbolo per conseguenza logica)

Scriviamo $X \models Y$ per indicare Y è conseguenza logica di X.

Conseguenza logica (2)

Ingrandimento del simbolo di conseguenza logica:

$$\models$$

In generale, il concetto di conseguenza logica si generalizza al caso di premesse multiple come segue:

Definizione (Conseguenenza logica)

Una fp Y è conseguenza logica delle fp $X_1, \ldots, X_n$ quando tutti gli assegnamenti di lettere a valori di verità che rendono vere tutte le X_i contemporanamente, rendono vera anche Y.

In simboli: $X_1, \ldots, X_n \models Y$.

Verificare una conseguenza logica

Vogliamo verificare che B è conseguenza logica di $A \to B$ ed A. Scriviamo la tavola di verità delle tre formule $A \to B$, A e B:

A	B	$A \to B$	A	B
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V

- Evidenziamo quali sono gli assegnamenti che rendono vere entrambe le premesse (A e $A \to B$)
- Constatiamo che in tutte queste righe (che poi è una sola) anche la conclusione B è vera
- Quindi B è conseguenza logica di $A \to B$ ed A

Un altro esempio

Verifichiamo adesso che $\neg B$ **non è** conseguenza logica di $A \rightarrow B$ e $\neg A$.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
V	V	V	F	F

- Evidenziamo quali sono gli assegnamenti che rendono vere entrambe le premesse ($A \rightarrow B$ e $\neg A$)
- Constatiamo che nella seconda riga evidenziata, le premesse sono vere ma la conclusione ($\neg B$) è falsa
- Quindi $\neg B$ **non è** conseguenza logica di $A \rightarrow B$ e $\neg A$

Conseguenza logica e implicazione (1)

Il concetto di conseguenza logica, ha delle affinità con il connettivo dell'implicazione:

- Y è conseguenza logica di X quando non può mai accadere che X è vera ed Y è falsa
- la fp $X \to Y$ è vera sempre tranne quando X è vera ed Y è falsa.

Non deve sorprendere quindi il seguente:

Teorema (Conseguenza logica e implicazione)

$X_1, \ldots, X_n \models Y$ se e solo se $X_1 \land \cdots \land X_n \to Y$ è una tatutologia.

Conseguenza logica e implicazione (2)

Esempio

Riprendiamo la tavola di verità usata per verificare che B è conseguenza logica di $A \to B$ e A, a cui aggiungo un paio di colonne.

A	B	$A \to B$	A	B	$(A \to B) \wedge A$	$((A \to B) \wedge A) \to B$
F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V

- Aggiungiamo una colonna con la congiunzione delle premesse. Sarà vera solo quando tutte le premesse sono vere, ovvero per la riga precedentemente evidenziata in rosso.
- Aggiungiamo una colonna con l'implicazione tra congiunzione delle premesse e conseguenza.
- Per le righe evidenziate, $(A \to B) \wedge A \to B$ è vera perché perché il conseguente è vero.
- Per le righe non evidenziate, $(A \to B) \wedge A \to B$ è vera perché l'antecedente è falso.
- Dunque $((A \to B) \wedge A) \to B$ è sempre vera.

Contenuti

Inferenze e regole di inferenza

Ripasso: inferenza

Ricordiamo la differenza tra inferenza

$$\frac{\textit{Se manca la benzina, allora l'auto non parte} \qquad \textit{Manca la benzina}}{\textit{L'auto non parte}}$$

dove premesse e conclusioni sono proposizioni...

Ripasso: regola di inferenza

...e regola di inferenza

$$\frac{A \to \neg B \qquad A}{\neg B}$$

dove premesse e conclusione sono fore proposizionali.

Conseguenza logica e correttezza delle inferenze (1)

Ripasso: inferenza corretta

Una inferenza è corretta (o valida) se ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Sappiamo anche che la correttezza di una inferenza dipende solo dalla sua forma logica, ovvero dalla regola di inferenza da cui deriva.

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza come

$$\frac{\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{array}}{Y}$$

è corretta (o valida) se ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Conseguenza logica e correttezza delle inferenze (2)

Definizione (Regola di inferenza corretta)

$$\begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ \hline Y \end{array}$$

è corretta se ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Ma questa è esattamente la definizione di conseguenza logica

$$X_1, \ldots, X_n \models Y$$

solo espresso in termini un po' più informali.

Teorema

Una regola di inferenza è corretta quando la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

Conseguenza logica e correttezza delle inferenze (3)

Esempio (Modus ponens)

Possiamo verificare formalmente che il *modus ponens* è una inferenza corretta. Il modus ponens è

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ A\end{array}}{B}$$

e abbiamo già visto nelle slide precedenti che B è conseguenza logica di $A \rightarrow B$ e di A.

Esempio (Fallacia della negazione dell'antecedente)

Possiamo verificare formalmente che la seguente regola di inferenza non è corretta:

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B\\ \neg A\end{array}}{\neg B}$$

Abbiamo già vistol che $\neg B$ non è conseguenza logica di $A \rightarrow B$ e di $\neg A$.

Ex falso quodlibet (1)

Consideriamo la seguente regola di inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \neg A \end{array}}{B}$$

Una istanza di questa regola, ad esempio, è

$$\frac{\begin{array}{c} \textit{Carla va alla festa} \\ \textit{Carla non va alla festa} \end{array}}{\textit{Michele è laureato}}$$

Ex falso quodlibet (2)

Cerchiamo di verificare la correttezza della regola con le tavola di verità:

A	B	A	$\neg A$	B
F	F	F	V	F
F	V	F	V	V
V	F	V	F	F
V	V	V	F	V

Constatiamo che:

- Non esistono righe in cui le premesse (A e $\neg A$) sono contemporaneamente vere!
- In tutte le righe in cui le premesse sono contemporaneamente vere, anche la conclusione B è vera
- B è conseguenza logica di A e $\neg A$ e quindi l'inferenza è corretta

Intuitivamente:

- Da una premessa sicuramente falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- Si usa spesso la locuzione latina ex falso sequitur quodlibet o la sua ellissi ex falso quodlibet.

Impegno esistenziale

- Abbiamo affermato che **in tutte le righe in cui le premesse sono contemporaneamente vere, anche la conclusione è vera**.
- Nella logica moderna il quantificatore universale non implica l'esistenza di ciò che si quantifica.
- La proposizione "**tutti gli elefanti volanti sono rosa**" è vera.
- L'idea è che non si può falsificare la proposizione con un controesempio. Se fosse falsa, dovrebbe esistere un elefante volante che non è rosa. Vi sfido a trovarne uno !
- In altre parola, la proposizione

  tutti gli elefanti volanti sono rosa

  equivale a

  non esiste alcun elefante volante che non è rosa
- Non la si è sempre pensata così in passato. Nella logica aristotelica, un frase del tipo "*Tutti gli A sono B*" implica l'esistenza di almeno un A.
- Si dice che nella logica aristotelica il quantificatore "tutti" ha un impegno esistenziale. Il vostro libro di testo discute questo fatto a pag. 186.