Inferenze nella logica dei predicati

prof. Gianluca Amato

19 dicembre 2024

Contenuti

Inferenze a livello predicativo

Fino ad ora abbiamo trattato la *logica proposizionale*. Nella logica proposizionale il costrutto di base è la proposizione, e proposizioni più complesse si ottengono tramite connettivi logici.

Quando entrano in gioco i *quantificatori*, la logica proposizionale non è più sufficiente per determinare la validità di una inferenza.

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Napoleone è corso}\\ \textit{Tutti i corsi sono francesi}\end{array}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\textit{Socrate è un uomo}\\ \textit{Tutti gli uomini sono mortali}\end{array}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

Se analizzate come fatto fin'ora, corrispondo alla regola di inferenza:

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{C}$$

che non è corretta! Bisogna passare alla logica dei predicati.

Forma logica per la logica dei predicati

A livello predicativo, la forma logica si ottiene in questo modo:

- esiste o per ogni al posto dei quantificatori (tutti, alcuni, ...);
- costanti individuali al posto di individui (Napoleone, Socrate);
- costanti predicative al posto di proprietà (essere corso, essere mortale);
- simboli al posto dei connettivi e quantificatori in italiano.

$$\frac{\textit{Napoleone è corso} \qquad \textit{Tutti i corsi sono francesi}}{\textit{Napoleone è francese}} \qquad \frac{\textit{Socrate è un uomo} \qquad \textit{Tutti gli uomini sono mortali}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\begin{array}{c} P\ a \\ \textit{per ogni}\ x, \textit{se}\ P\ x\ \textit{allora}\ Q\ x \end{array}}{Q\ a} \Longrightarrow \frac{\begin{array}{c} Pa \\ \forall x(Px \rightarrow Qx) \end{array}}{Qa}$$

Costanti individuali, simboli di connettivi e quantificatori

Per i simboli dei connettivi usiamo gli stessi della logica delle proposizioni: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$.

Costanti individuali, simboli di connettivi e quantificatori

Per i simboli dei connettivi usiamo gli stessi della logica delle proposizioni: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$.

Per i simboli dei quantificatori usiamo:

- "per ogni x," si scrive $\forall x$
- "esiste x tale che," si scrive $\exists x$

Costanti individuali, simboli di connettivi e quantificatori

Per i simboli dei connettivi usiamo gli stessi della logica delle proposizioni: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$.

Per i simboli dei quantificatori usiamo:

- "per ogni x," si scrive $\forall x$
- "esiste x tale che," si scrive $\exists x$

Le costanti individuali rappresentano un individuo. Si scrivono di solito in lettere minuscole. In particolare noi useremo a, b, c, ...

Costanti predicative

Le costanti predicative rappresentano un predicato. Si scrivono di solito in lettere maiuscole, in particolare noi useremo P, Q, R, S, etc. . .

Costanti predicative

Le costanti predicative rappresentano un predicato. Si scrivono di solito in lettere maiuscole, in particolare noi useremo P, Q, R, S, etc. . .

Ad ogni costante predicativa sarà associatà una arità che dipende dal tipo di relazione che essa rappresenta.

- Ad esempio se P rappresenta il predicato "essere francese" (che si applica ad un solo individuo) allora P sarà di arità uno.
- Come ulteriore esempio, se P rappresenta il predicato "essere più grande di" (che si applica a due individui) allora P sarà di arità due.

Costanti predicative

Le costanti predicative rappresentano un predicato. Si scrivono di solito in lettere maiuscole, in particolare noi useremo P, Q, R, S, etc. . .

Ad ogni costante predicativa sarà associatà una arità che dipende dal tipo di relazione che essa rappresenta.

- Ad esempio se P rappresenta il predicato "essere francese" (che si applica ad un solo individuo) allora P sarà di arità uno.
- Come ulteriore esempio, se P rappresenta il predicato "essere più grande di" (che si applica a due individui) allora P sarà di arità due.

A seconda dell'arità della costante predicativa, essa accetterà un certo numero di argomenti. Ad esempio, se P è una costante di arità 2, vuol dire che P accetta due argomenti, per cui nelle formule comparità come Pxy, Pab, . . .

Costanti predicative

Le costanti predicative rappresentano un predicato. Si scrivono di solito in lettere maiuscole, in particolare noi useremo P, Q, R, S, etc...

Ad ogni costante predicativa sarà associatà una arità che dipende dal tipo di relazione che essa rappresenta.

- Ad esempio se P rappresenta il predicato "essere francese" (che si applica ad un solo individuo) allora P sarà di arità uno.
- Come ulteriore esempio, se P rappresenta il predicato "essere più grande di" (che si applica a due individui) allora P sarà di arità due.

A seconda dell'arità della costante predicativa, essa accetterà un certo numero di argomenti. Ad esempio, se P è una costante di arità 2, vuol dire che P accetta due argomenti, per cui nelle formule comparità come Pxy, Pab, ...

Tavolta si usa per le costanti predicative la stessa notazione che si usa per le funzioni Python, con gli argomenti tra parentesi e separate da virgole: $P(x, y)$, $P(a, b)$, ...

Formule e inferenze

Le formule che è possibile scrivere nella logica dei predicati sono dette formule ben formate (fbf) o semplicemente formule logiche. Sono l'equivalente delle *forme proposizionali* viste fin'ora.

Il nostro obiettivo come sempre è capire quando una regola di inferenza è corretta. E la definizione informale di regola di inferenza corretta è la stessa della logica proposizionale:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Nella logica delle proposizioni la frase "ogni volta che ..." veniva tradotta in maniera più precisa con "in ogni riga della tabella tabella di verità" o "in ogni assegnamento di valori di verità a lettere proposizionali". Ma cosa significa "ogni volta che ..." nella logica dei predicati?

Inferenze nella logica proposizionale (1)

Facciamo un passo indietro. Più in generale, nella logica proposizionale, "ogni volta che ..." vuol dire "in tutti i possibili modi di interpretare le lettere proposizionali".

Un formula del tipo $A \rightarrow B$ non è né vera né falsa. Ma se fissiamo una proposizione per ogni lettera proposizionale, allora possiamo tornare indietro, dalla formula tornare ad avere una proposizione, e possiamo discutere del suo valore di verità.

Ad esempio, data la formula $A \rightarrow B \wedge C$, se fissiamo:

- $A =$ Parigi è la capitale della Francia
- $B =$ Roma è la capitale d'Italia
- $C =$ Berlino è la capitale della Finlandia

allora la formula diventa

> *Se Parigi è la capitale della Francia, allora Roma è la capitale d'Italia e Berlino è la capitale della Finlandia.*

che è falsa perché l'antecedente è vero ma il conseguente è falso.

Inferenze nella logica proposizionale (2)

Dunque, potremmo riscrivere la definizione di regola di inferenza corretta in questo modo:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se per ogni possibile interpretazione delle lettere proposizionali come proposizioni, ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Tuttavia, ci rendiamo subito conto che la definizione ha dei problemi:

- i possibili modi di interpretare le lettere proposizionali sono infiniti: la definizione ci da quindi un modo di verificare se una regola di inferenza è corretta;
- rimpiazzare le lettere proposizionali con proposizioni ci manda nel reame del linguaggio naturale dove tutto è ambiguo e non è detto che siamo in grado di dire quali proposizioni sono vere e quali false.

Inferenze nella logica proposizionale (3)

Fortunatamente, ci rendiamo presto conto che non è veramente necessario rimpiazzare le lettere proposizionali con proposizioni, perché l'unica cosa che ci interessa di queste proposizioni è se sono vere o false.

Quindi possiamo, in maniera più semplice, rimpiazzare le lettere con dei valori di verità, e otteniamo la definizione che abbiamo visto fin'ora:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se per ogni assegnamento di valori di verità alle lettere proposizionali, ogni volta che le premesse sono vere, anche la conclusione è vera.

Nella logica dei predicati, seguiremo questo percorso:

- vedremo dapprima una definizione più informale di correttezza di regola di inferenza, simile a quella della slide precedente;
- poi vedremo una definizione più formale, che purtroppo non sarà così semplice come quella della logica proposizionale.

Contenuti

Interpretazioni

Per trasformare una forma proposizionale in una proposizione, era sufficiente rimpiazzare ogni lettera con una proposizione. La cosa non è così semplice nella logica dei predicati. Chiamiamo interpretazione il processo con cui passiamo dalle formule ben formate alle proposizioni.

Definizione (Interpretazione — informale)

Una interpretazione consiste di:

- un insieme di individui, chiamato *dominio*, da intendersi come i valori su cui le costanti individuali possono essere interpretate e i quantificatori possono essere valutati;
- un assegnamento di un individuo del dominio per ogni costante individuale;
- un assegnamento di un predicato per ogni costante predicativa, tale che:
  - se la costante predicativa si applica ad un solo individuo (tipo Px) allora il predicato dovra essere una proprietà ("essere pari");
  - se la costante predicativa si applica a due individui (tipo Pxy) allora il predicato dovra essere una relazione binaria ("essere più grade di");
  - in maniera simile per costanti che si applicano a più individui.

Esempi di interpretazione (1)

Consideriamo le formule

1. $P(a)$
2. $\forall x(Px \to Rx)$
3. $\forall x \exists y Qxy$

e vediamo un paio di interpretazoni, completamente diverse, per queste formule.

Si noti come il dominio influenzi il tipo di predicati che possiamo scegliere per P, Q ed R. Se il dominio sono le regioni italiane, il predicato P non può essere "essere pari" perché non ha senso chiedersi se una regione è pari o dispari.

Esempi di interpretazione (2)

Esempio (Una interpretazione)

Consideriamo la seguente interpretazione:

- dominio = i numeri interi relativi
- $a = 5$
- P = essere pari
- R = essere divisibile per 4
- Q = essere maggiore di

Le formule diventano:

1. "5 è pari" (falso)
2. "per ogni numero intero x, se x è pari allora è divisibile per 4" (falso), che si può rendere in maniera più naturale in italiano con "tutti i numeri pari sono divisibili per 4"
3. "per ogni numero intero x esiste un numero intero y tale che x è maggiore di y" (vero)

Esempi di interpretazione (3)

Esempio (Importanza del dominio)

Consideriamo una nuova interpretazione che differisce dalla precedente solo per il dominio: invece dei numeri interi relativi, consideriamo i numeri naturali (interi positivi).

Le formule diventano:

1. "5 è pari" (falso)
2. "per ogni numero naturale x, se x è pari allora x è divisibile per 4" (falso), che si può rendere in maniera più naturale in italiano con "tutti i numeri naturali pari sono divisibili per 4"
3. "per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che x è maggiore di y" (falso)

Si noti che l'ultima formula è adesso falsa, mentre prima era vera, perché non esiste un numero naturale minore di 0.

Esempi di interpretazione (4)

Esempio (Un'altra interpretazione)

Consideriamo ora una interpretazione completamente diversa:

- dominio = le regioni italiane
- a = Lazio
- P = essere a statuto speciale
- R = essere bagnata dal mare
- Q = essere confinante con

e otteniamo

1. "il Lazio è a statuto speciale" (falso);
2. "per ogni regione italiana x, se x è a statuto speciale allora x è bagnata dal mare", che si può rendere in maniera più naturale in italiano con "tutte le regioni italiane a statuto speciale sono bagnate dal mare" (falso, perché la Val d'Aosta non è bagnata dal mare);
3. "per ogni regione italiana x esiste una regione italiana y tale che x è confinante con y" (falso, perché le isole non confinano con altre regioni).

Regole di inferenza corrette

Possiamo quindi definire la correttezza di una regola di inferenza come:

Definizione (Regola di inferenza corretta)

Una regola di inferenza è corretta se e solo se tutte le interpretazioni che rendono vere le premesse rendono vere anche la conclusione.

Notare che questa definizione non ci consente veramente di stabilire in maniera meccanima se una regola di inferenza è corretta, perché le possibili interpretazioni sono infinite e non possiamo certo provarle tutte!

Tuttavia, ci consente quantomeno di verificare facilmente che una regola di inferenza non è corretta: basta trovare una singola interpretazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione.

Contenuti

Falsificare una regola di inferenza (1)

Consideriamo la seguente regola:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Px \to Qx)\\ Qa\end{array}}{Pa}$$

e verifichiamo che non è corretta. Notare che anche ad occhio è sospetta, peché assomiglia alla "fallacia dell'affermazione del conseguente"

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B\end{array}}{A}$$

ma con un quantificatore.

Falsificare una regola di inferenza (2)

Consideriamo la seguente interpretazione:

- dominio = numeri naturali
- $a = 2$
- P = essere divisibile per 4
- Q = essere pari

Le premesse sono:

- "per ogni numero naturale x, se x è divisibile per 4 allora x è pari", ovvero "tutti i numero divisibili per 4 sono pari" (vero)
- "2 è pari" (vero)

e la conclusione è

- "2 è divisibile per 4" (falso)

Quindi la regola non è corretta.

Falsificare una regola di inferenza (3)

Notare che esistono anche intepretazioni per cui la conclusione è corretta. Ad esempio, basta rimpiazza a con 4 nella precedente interpretazione. Questo però non rende la regola di inferenza corretta!!!

Perché sia corretta, la conclusione deve essere vera in tutte le intepretazione che rendono vere le premesse: basta trovarne una che non è così (come quella della slide precedente) e la regola non è corretta.

Formule valide (1)

Non è solo il concetta di regola di inferenza corretta che si estende immediatamente al caso predicativo. Anche il concetto di tautologia si estende in maniera naturale, sebbene con un altro nome.

Definizione

Una formula è detta valida se e solo se è vera in tutte le interpretazioni.

Esempio

La formula $Pa \vee \neg Pa$ è valida, perché è vera in tutte le interpretazioni. Infatti data una qualunque interpretazione:

- se Pa è vera, allora la formula di sopra è $V \vee \neg V = V$;
- se Pa è falsa, allora la formula di sopra è $F \vee \neg F = F \vee V = V$

Notare che a questa conclusione siamo giunti con una dimostrazione matematica, non riempiendo un tabella in maniera meccanica come per la logica proposizionale.

Formule valide (2)

Notare che $Pa \vee \neg Pa$ deriva dal terzo escluso ($A \vee \neg A$) rimpiazzando la formula A con Pa. Questo è un metodo standar per ottenere vormule valide:

Teorema

Se X è una tautologia, tutte le formule ottenuta rimpiazzando in X le lettere proposizionali con formule ben formate sono valide.

Esempio

Le seguenti formule sono valide:

- $(\forall x Px) \vee \neg(\forall x Px)$
- $(\forall x \exists y Qxy) \to (\forall x \exists y Qxy)$
- $(\forall x Px) \vee Qa \leftrightarrow Qa \vee (\forall x Px)$

Formule valide (3)

Esistono anche formule valide che non derivano da tautologie.

Esempio

La formula $(\forall x P x) \rightarrow Pa$ è una formula valida. Infatti:

- se $\forall x P x$ è vera, P è vero per qualunque elemento del dominio, quindi a maggior regione è vero per l'elemento a, chiunque esso sia;
- se $\forall x P x$ è falsa, allora l'implicazione è sicuramente vera per definizione.

Equivalenza e conseguenza logica

Infine, il concetto di equivalenza e di conseguenza logica si trasporta in maniera naturale alla logica dei predicati.

Definizione (Equivalenza logica)

Due formule si dicono equivalenti se e solo se sono vere nelle stesse interpretazioni.

Definizione (Conseguenza logica)

Una formula ϕ è conseguenza logica delle formule $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se e solo se in ogni interpretazione in cui sono vere $\phi_1, \ldots, \phi_n$ è vera anche ϕ.

Notare che indichiamo una generica formula con le lettere greche ϕ, ψ e simili. Non usiamo X, Y e Z come nella logica proposizionale perché si confonderebbero con le variabili individuali x, y e z.

Contenuti

Quantificatore universale limitato (1)

Consideriamo le proposizioni:

"Tutti sono mortali"   "Tutti gli uomini sono mortali"

La prima afferma che qualunque individuo è mortale, mentre nella seconda la proprietà di essere mortali è ristretta solo ad alcuni individui (gli uomini) perché magari altri (gli dei?) non lo sono. Si parla in questo secondo caso di quantificatore limitato.

Il quantificatore limitato si può ottenere dal quantificatore illimitato in questo modo. Se:

- Mx sta per "x è mortale"
- Ux sta per "x è un essere umano"

la forma logica di "Tutti gli uomini sono mortali" diventa

$$\forall x(Ux \to Mx)$$

Letteralmente: "qualunque individuo x prendiamo, se x è un uomo allora x è mortale".

Quantificatore universale limitato (3)

Per comodità, però, in certi ambiti si una una notazione più compatta per il quantificatore universale limitato. Ad esempio, in matematica.

Esempio (Quantificatore limitato da un insieme)

Se vogliamo dire

"Tutti gli elementi dell'insieme A sono positivi"

possiamo scrivere

$$\forall x(x \in A \rightarrow x > 0)$$

ma è più comodo scrivere

$$\forall x \in A\,(x > 0)$$

La seconda formula è solo un modo compatto di scrivere la prima.

Quantificatore esistenziale limitato (1)

Anche il quantificatore esistenziale ha una variante limitata. La proposizione:

"Esiste un uomo che sa volare"

vuol dire non solo che esiste un qualche individuo che vola, ma che possiamo scegliere quell'individuo in modo che sia un uomo.

Il quantificatore limitato, anche in questo caso, lo si può ottenere da quello standard. Se

- Mx sta per "x è mortale"
- Vx sta per "x sa volare"

allora la forma logica della proposizione è

$$\exists x(Mx \land Vx)$$

Attenzione! La formula corretta $\exists x(Mx \land Vx)$ con l'uso della congiunzione e non $\exists x(Mx \to Vx)$ che vorrebbe dire tutt'altro!

Quantificatore esistenziale limitato (2)

Per comodità, in certi ambiti si una una notazione più compatta per il quantificatore esistenziale limitato. Ad esempio, in matematica.

Esempio (Quantificatore limitato da un insieme)

Se vogliamo dire

"Esiste un elemento dell'insieme *A* positivo"

possiamo scrivere

$$\exists x (x \in A \land x > 0)$$

ma è più comodo scrivere

$$\exists x \in A\, (x > 0)$$

La seconda formula è solo un modo compatto di scrivere la prima.

Quantificatore limitati e universo del discorso (1)

I realtà c'è una certa ambiguità sul fatto che un quantificatore sia limitato o no: dipende da qual è l'universo del discorso, ovvero l'insieme di tutti gli individui a cui si riferisce il quantificatore.

Normalmente quale sia l'universo del discorso va capito dal contesto. Ad esempio, supponiamo di avere a che fare con le seguenti proposizioni:

"Tutti gli uomini sono mortali"
"Tutti i cetacei vivono in acqua"
"Esiste un rettile che vola"

L'universo del discorso potrebbe essere l'insieme degli esseri viventi. In ogni caso:

- i quantificatori vanno intesi in senso limitato;
- avremo bisogno dei predicati "essere uomo", "essere cetaceo", "essere rettile" per poter scrivere le formule.

In altri termini, l'universo del discorso è la versione in linguaggio naturale del concetto di dominio.

Quantificatore limitati e universo del discorso (2)

Supponiamo però che le proposizioni a cui siamo interessati siano:

"Tutti gli uomini sono mortali"
"Esiste un uomo più alto di due metri"
"Nessun uomo è in grado di volare'

In questo caso:

- possiamo prendere come universo del discorso direttamente gli esseri umani;
- i quantificatori possono essere intesi in senso illimitato;
- non abbiamo bisogno del predicato "essere uomo": la forma logica della prima proposizione è semplicemente $\forall x Mx$, dove M è il predicato "essere mortale".

Quantificatore limitati e universo del discorso (2)

Supponiamo però che le proposizioni a cui siamo interessati siano:

"Tutti gli uomini sono mortali"
"Esiste un uomo più alto di due metri"
"Nessun uomo è in grado di volare'

In questo caso:

- possiamo prendere come universo del discorso direttamente gli esseri umani;
- i quantificatori possono essere intesi in senso illimitato;
- non abbiamo bisogno del predicato "essere uomo": la forma logica della prima proposizione è semplicemente $\forall x M x$, dove M è il predicato "essere mortale".

Forse sarebbe meglio fare degli esempi del quantificatore limitato con le tessere, come nella sezione sottostante. In questo modo si potrebbe spiegare meglio il perché l'implicazione è il connettivo giusto da usare nel $\forall$ ma non nell'$\exists$.

Contenuti

Equivalenze derivate dalla logica delle proposizioni

Se abbiamo una equivalenza logica proposizionale e rimpiazziamo le lettere proposizionali con formule ben formate, otteniamo una equivalenza logica predicativa.

Esempio

Data l'equivalenza logica $A \wedge B \equiv B \wedge A$, otteniamo l'equivalenza logica predicativa

$$(\forall x Px) \wedge \exists x(Qx \wedge \forall y Rxy) \equiv \exists x(Qx \wedge \forall y Rxy) \wedge (\forall x Px)$$

sostituendo A con $\forall x Px$ e B con $\exists x(Qx \wedge \forall y Rxy)$.

Se indichiamo con le lettere X ed Y delle formule generiche, possiamo scrivere l'equivalenza logica predicativa come

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X \quad .$$

Negazione e quantificatori (1)

Due equivalenze logiche molto importanti (e molto ricorrenti nei test di logica) sono le seguenti:

$$\neg\exists x X \equiv \forall x \neg X \qquad \neg\forall x X \equiv \exists x \neg X$$

Esempio

Supponiamo che l'univero del discorso siano gli esseri umani. Allora, se X è la formula "x sa volare":

- $\neg\exists x X$ è "non esiste un essere umano che sa volare"
- $\forall x \neg X$ è 'tutti gli essere umani non sanno volare"

ed entrambi vogliono dire la stessa cosa (sebbene il secondo in italiano sia innaturale)

Questa equivalenza ci consente quindi di spostare la negazione dentro o fuori un quantificatore, pur di cambiare il tipo del quantificatore.

Negazione e quantificatori (2)

Notare che questa equivalenza ci consente anche di dimostrare che i due quantificatori sono ridondanti. Ne basterebbe solo uno. Infatti:

$$\begin{aligned} \exists x X &\equiv \neg\neg\exists x X && \text{(doppia negazione)} \\ &\equiv \neg\forall x \neg X && \text{(equivalenza precedente)} \end{aligned}$$

Esempio

"Esiste un gatto nero" è equivalente a "non è vero che tutti i gatti non sono neri".

Ovviamente si preferisce continuare ad usare due quantificatori perché rendono il discorso più chiaro.

Negazione e quantificatori (3)

Ovviamente anche il $\forall$ si può riscrivere usando negazione ed $\exists$:

$$\begin{aligned} \forall x X &\equiv \neg\neg\forall x X && \text{(doppia negazione)} \\ &\equiv \neg\exists x \neg X && \text{(equivalenza precedente)} \end{aligned}$$

Esempio

"Tutti i gatti sono neri" è equivalente a "non esiste un gatto che non è nero'.

Negazione e quantificatori (4)

Queste equivalenze assomigliano un po' alla legge di De Morgan, che riportiamo qui sotto:

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \qquad\qquad \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

Il quantificatore $\forall$ è una specie di "congiunzione" di formule, mentre il quantificatore $\exists$ è una specie di "disgiunzione" di formule. Ad esempio, se l'universo del discorso sono i numeri naturali, in maniera non del tutto rigorosa possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \forall x Px &\equiv P0 \land P1 \land P2 \land P3 \dots \\ \exists x Px &\equiv P0 \lor P1 \lor P2 \lor P3 \dots \end{aligned}$$

Applicando De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x Px) &\equiv \neg(P0 \land P1 \land P2 \land P3 \dots) && \text{(equivalenza vista prima)} \\ &\equiv (\neg P0) \lor (\neg P1) \lor (\neg P2) \lor \dots && \text{(legge di De Morgan)} \\ &\equiv \exists x(\neg Px) && \text{(equivalenza vista prima)} \end{aligned}$$

Negazione e quantificatori limitati

Le equivalenze precedenti valgono anche per i quantificatori limitati. Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x \in A\,(x > 0) &\equiv \neg\forall x(x \in A \to x > 0) && \text{(rimozione del quantificatore limitato)}\\
&\equiv \exists x\neg(x \in A \to x > 0) && \text{(equivalenza precedente)}\\
&\equiv \exists x\neg\neg(x \in A \land \neg(x > 0)) && \text{(poiché } A \to B \equiv \neg(A \land \neg B))\\
&\equiv \exists x(x \in A \land \neg(x > 0)) && \text{(doppia negazione)}\\
&\equiv \exists x \in A\,\neg(x > 0) && \text{(reintroduzione del quantificatore limitato)}
\end{aligned}
$$

In generale:

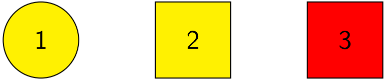
$$
\begin{aligned}
\neg\forall x(Y \to X) &\equiv \exists x(Y \land \neg X)\\
\neg\exists x(Y \land X) &\equiv \forall x(Y \to \neg X)
\end{aligned}
$$

Interpretazione dei prossimi esempi

Nei prossimi esempi utilizzeremo la seguente intepretazione:

- il dominio sarà un insieme di tessere che possono avere varie forme e colori;
- il predicato unario R sta per "essere rotondo";
- il predicato unario G sta per "essere giallo'.

Il numero di tessere, la loro forma e colore verrà rappresentato graficamente. Ad esempio



è una interpretazione con tre tessere, la prima gialla e tonda, la seconda gialla e rettangolare, la terza rossa e rettangolare.

Quantificatore universale e congiunzione (1)

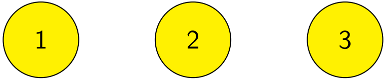
Consideriamo la formula $\forall x(Rx \wedge Gx)$, che in italiano si può tradurre con

"tutte le tessere sono rotonde e gialle"

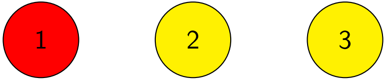
Dovrebbe essere evidente che questa è equivalente a $(\forall x Rx) \wedge (\forall x Gx)$, ovvero

"tutte le tessere sono rotonde e tutte le tessere sono gialle"

La seguente interpretazione soddisfa sia $\forall x(Rx \wedge Gx)$ che $(\forall x Rx) \wedge (\forall x Gx)$:



mentre la seguente non soddisfa nessuna delle due



Quantificatore universale e congiunzione (2)

Esiste una configurazione di tessere che soddisfi $\forall x(Rx \wedge Gx)$ ma non $(\forall x Rx) \wedge (\forall x Gx)$, o viceversa ?

Quantificatore universale e congiunzione (2)

Esiste una configurazione di tessere che soddisfi $\forall x(Rx \land Gx)$ ma non $(\forall x Rx) \land (\forall x Gx)$, o viceversa ?

Vi renderete presto conto che non è possibile, perché le due formule sono equivalenti e quindi sono vere esattamente nelle stesse interpretazioni !

Quantificatore universale e congiunzione (2)

Esiste una configurazione di tessere che soddisfi $\forall x(Rx \wedge Gx)$ ma non $(\forall x Rx) \wedge (\forall x Gx)$, o viceversa ?

Vi renderete presto conto che non è possibile, perché le due formule sono equivalenti e quindi sono vere esattamente nelle stesse interpretazioni !

Pià in generale, è vera la seguente equivalenza, che è un sorta di proprietà distributiva del quantificatore universale rispetto alla congiunzione:

$$\forall x(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv (\forall x \phi_1) \wedge (\forall x \phi_2)$$

Quantificatore universale e disgiunzione (1)

Ci chiediamo adesso se valga anche l'equivalenza

$$\forall x(Rx \lor Gx) \equiv (\forall x Rx) \lor (\forall x Gx)$$

ovvero

"tutte le tessere sono rotonde o gialle"

$\equiv$

"tutte le tessere sono rotonde o tutte le tessere sono gialle"

Quantificatore universale e disgiunzione (1)

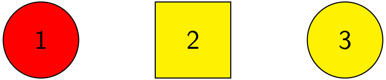
Ci chiediamo adesso se valga anche l'equivalenza

$$\forall x(Rx \lor Gx) \equiv (\forall x Rx) \lor (\forall x Gx)$$

ovvero

"tutte le tessere sono rotonde o gialle"
$\equiv$
"tutte le tessere sono rotonde o tutte le tessere sono gialle"

Tuttavia, la seguente interpretazione soddisfa $\forall x(Rx \lor Gx)$ ma non $(\forall x Rx) \lor (\forall x Gx)$:



Quantificatore universale e disgiunzione (2)

È vero però che

$$\forall x(Rx \lor Gx) \text{ è conseguenza logica di } (\forall xRx) \lor (\forall xGx)$$

Infatti se $(\forall xRx) \land (\forall xGx)$, allora o tutte le tessere sono rotonde, oppure sono tutte gialle (o anche entrambe le cose). In ogni caso, ogni tessara è o rotonda o gialla.

Una interpretazione che:

- rende vera $(\forall xRx) \lor (\forall xGx)$
- rende falsa $\forall x(Rx \lor Gx)$

non esiste!

In generale è vero che:

$$\forall x(\phi_1 \lor \phi_2) \text{ è conseguenza logica di } (\forall x\phi_1) \lor (\forall x\phi_2)$$

Quantificatore esistenziale e congiunzione

Se rimpiazziamo il quantificatore universale con l'esistenziale, otteniamo proprietà simili. Intanto

$$\forall x(Rx \vee Gx) \equiv (\forall x Rx) \vee (\forall x Gx)$$

ovvero

"esiste una tessera rotonda o gialla"
$\equiv$
"esiste una tessera rotonda o esiste una tessera gialla"

In generale è vero

$$\forall x(\phi_1 \vee \phi_2) \equiv (\forall x \phi_1) \vee (\forall x \phi_2)$$

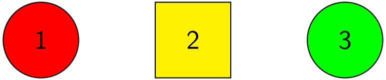
Quantificatore esistenziale e disgiunzione (1)

Consideriamo adesso

- $\exists x(Rx \wedge Gx)$, ovvero "esiste una tessera rotonda e gialla"
- $(\exists x Rx) \wedge (\exists x Gx)$, ovvero "esiste una tessera rotonda ed esiste una tessera gialla"

Sono equivalenti ?

La risposta è no. Questa interpretazione rende vera la seconda ma non la prima:



Infatti è vero che esiste una tessera rotonda (la 1 e la 3) e che esiste una tessera gialla (2), ma non esiste una tessera che è rotonda e gialla contemporaneamente.

Quantificatore esistenziale e disgiunzione (2)

È vero però che

$$(\exists x Rx) \land (\exists x Gx) \text{ è conseguenza logica di } \exists x (Rx \land Gx)$$

Infatti se $\exists x Rx \land \exists x Gx$, vuol dire che possiamo trovare una tessera che è rotonda e gialla allo stesso tempo. Ovviamente, grazie a questa tessera, sarà vera sia $\exists x Rx$ che $\exists x Gx$.

Una interpretazione che:

- rende vera $\exists x (Rx \land Gx)$
- rende false $(\exists x Rx) \land (\exists x Gx)$

non esiste!

In generale è vero che:

$$(\exists x \phi_1) \land (\exists x \phi_2) \text{ è conseguenza logica di } \exists x (\phi_1 \land \phi_2)$$

Contenuti

Deduzione naturale

- Il calcolo logico della deduzione naturale che abbiamo introdotto per la logica proposizionale si può estendere alla logica dei predicati.
- In questo caso è ancora più importante, perché non c'è un metodo sistematico per capire se una regola di inferenza è corretta o no come quello delle tavole di verità.
- Le regole della deduzione naturale sono le stesse di prima, con l'aggiunta di quattro nuove regole:
  - introduzione del quantificatore universale;
  - eliminazione del quantificatore universale;
  - introduzione del quantificatore esistenziale;
  - eliminazione del quantificatore esistenziale.

Eliminazione del quantificatore universale

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}\ (\mathrm{E}\forall)$$

dove

- $\phi(x)$ indica una qualunque formula potenzialmente contenente x;
- t è un termine (costante individuale o variabile libera) qualunque;
- $\phi(t)$ è ottenuta rimpiazzando le occorrenze libere di x con t.

Informalmente, vuol dire che se so che Y è vera per tutti gli individui, allora sarà sicuramente vero per t, chiunque sia t.

Esempio ($\forall x(Px \to Qx), Pa \vdash Qa$)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx)}{Pa \to Qa}\ (\mathrm{E}\forall) \qquad Pa}{Qa}\ (\mathrm{E} \to)$$

Introduzione del quantificatore esistenziale

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}\ (\mathrm{I}\exists)$$

Informalmente, vuol dire che se so che ϕ è vera per un certo individuo specifico t, posso concludere che esiste un individuo x che rende vera ϕ (l'individuo in questione è proprio t!!).

Esempio ($\forall x Px \vdash \exists x Px$)

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px}{Pa}\ (\mathrm{E}\forall)}{\exists x Px}\ (\mathrm{I}\exists)$$

Introduzione del quantificatore universale

Come posso concludere una formula del tipo $\forall x Px$?

Dimostrando che Px è vera per un individuo x qualsiasi, di cui non so nulla.

$$\frac{\phi(t)}{\forall x \phi(x)}\ (\mathrm{I}\forall)$$

se t non appare in nessuna ipotesi non cancellata

Esempio $(\forall x(Px \to Qx), \forall x Px \to \forall x Qx)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx)}{\forall a(Pa \to Qa)}\ (\mathrm{E}\forall) \qquad \dfrac{\forall x Px}{Pa}\ (\mathrm{E}\forall)}{Qa}\ (\mathrm{E}\to)}{\forall x Qx}\ (\mathrm{I}\forall)$$

Cosa accade se dimentico la condizione a latere ?

La regola di inferenza è falsa. Ad esempio, si può dimostrare che $Pa \vdash \forall Px$ con un singolo passo:

$$\frac{Pa}{\forall x Px}\ (\mathrm{I}\forall)$$

Come dire che

$$\frac{\textit{Carlo studia matematica}}{\textit{Tutti studiano matematica}}$$

Eliminazione del quantificatore esistenziale

Come posso usare il fatto di sapere che $\exists x Px$? Ricordiamo che $\exists$ è una specie di disgiunzione infinita.

$$\dfrac{\exists x \phi(x) \qquad \begin{array}{c}[\phi(t)] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\psi}\;(\mathrm{E}\exists)$$

se t non compare in ψ e in nessuna ipotesi non cancellata di ψ

Esempio $(\forall x(Px \to Qx), \exists x Px \vdash \exists x Qx)$

$$\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx)}{Pa \to Qa}\;(\mathrm{E}\forall) \qquad [Pa]_1}{Qa}\;(\mathrm{E}\to)}{\exists x Qx}\;(\mathrm{I}\exists)}{\exists x Qx}$$

Teoremi di correttezza e completezza

Ovviamente, anche per la logica dei predicati valgono i teoremi di correttezzae e completezza.

Teorema (Correttezza (forte) della deduzione naturale)

Se $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi$, *allora* $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi_n$.

Teorema (Completezza (forte) della deduzione naturale)

Se $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \phi$, *allora* $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi$.

Le dimostrazioni di questo teoremi esulano dal programma del corso.