

CONSEGUENZA Logica

γ è conseguenza logica di $X_1, \dots, X_n$ quando in tutte le
formule proposizionali righe delle tabelle di verità che rendono vere le
formule $X_1, X_2, \dots, X_n$, è vera anche γ .

Calcolo logico } un meccanismo per trovare conseguenze di
Sistemi deduttivi } premesse che si assumono note

DEDUZIONE NATURALE (Cap 10 libro)

Non consideriamo tutti i connettivi: consideriamo solo:

$\wedge, \vee, \rightarrow, \perp$

Rimangono fuori

$\neg$

$\leftrightarrow$

$\top$

$\bot$

$$A \vee B \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$\neg A \equiv A \rightarrow \perp$$

REGOLE DI INTRODUZIONE: che introducono un connettivo nella conclusione

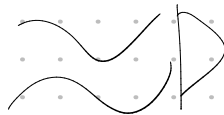
REGOLE DI ELIMINAZIONE: che eliminano un connettivo presente nelle premesse.

Per ogni connettivo vedremo alcune regole di introduzione ed alcune di eliminazione.

INTRODUZIONE DI $\wedge$ + CONVENIENTE

$$\frac{x \quad y}{x \wedge y}$$

$(\wedge I)$



$$\frac{x \quad y}{x \wedge y} (\wedge I)$$

$$\frac{x \wedge y}{x} (\wedge E)$$

ELIMINAZIONE $\wedge$

$$\frac{x \wedge y}{y} (\wedge E)$$

$$\frac{x}{x \vee y} (\vee I)$$

$$\frac{y}{x \vee y} (\vee I)$$

$$\frac{x \vee y}{?} (\vee E)$$

IN ATTESA

$$\frac{x \rightarrow y \quad x}{y} (\rightarrow E)$$

$$\frac{?}{x \rightarrow y} (\rightarrow I)$$

	ELIMIN.	INTRO
$\wedge$	$\frac{X \wedge Y}{X}$ $\frac{X \wedge Y}{Y}$ ($\wedge E$)	$\frac{X}{X \wedge Y} \frac{Y}{Y}$ ($\wedge I$)
$\vee$	?	$\frac{X}{X \vee Y} \frac{Y}{X \vee Y}$ ($\vee I$)
$\rightarrow$	$\frac{X \rightarrow Y \quad X}{Y}$ ($\rightarrow E$)	$\frac{[X] \dots Y}{X \rightarrow Y}$ ($\rightarrow I$)
$\perp$	?	?

$$\frac{A \wedge B \rightarrow C \quad (A \rightarrow B \quad A)}{C}$$

Dal fatto che A è vero e $A \rightarrow B$ è vero, per modus-ponens è vero B . Quindi $A \wedge B$ è vero. Poiché $A \wedge B \rightarrow C$, per modus-ponens è vero C .

$$\frac{\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad (A \rightarrow B \quad A)}{A \wedge B \rightarrow C} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{A \wedge B \rightarrow C, \quad A \rightarrow B, \quad A}{C} \quad \text{Segue}$$

Se riesco a scrivere una "dimostrazione" con premesse $X_1, \dots, X_n$ e conclusione Y , si dice che Y è dimostrabile da $X_1, \dots, X_n$ e si scrive

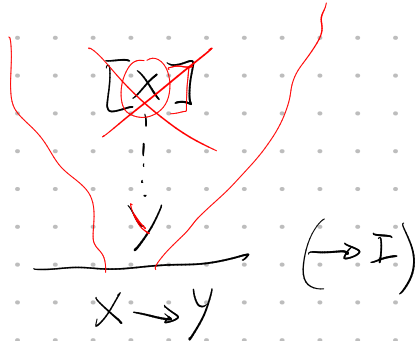
$$X_1, \dots, X_n \vdash Y$$

formule che non sono il risultato di altre regole

Teorema

$$X_1, \dots, X_n \models Y \quad \text{se e solo se} \quad X_1, \dots, X_n \vdash Y$$

Troviamo la regola ($\rightarrow I$)



Teorema

Se n è divisibile per 4 allora n è pari

$$(n \text{ è divisibile per } 4 \rightarrow n \text{ è pari})$$

Dim.

Assumiamo che n sia divisibile per 4. [Allora

$$\frac{n}{4} = d \quad \text{con } d \text{ numero intero, ovvero}$$

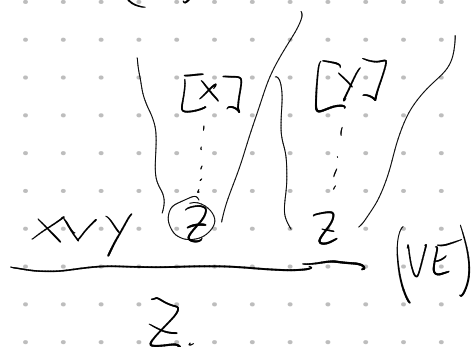
$$n = 4 \cdot d \quad \text{Pertanto } \frac{n}{2} = \frac{4d}{2} = 2d \text{ che}$$

è intero. Quindi n è divisibile per 2, ovvero è pari.

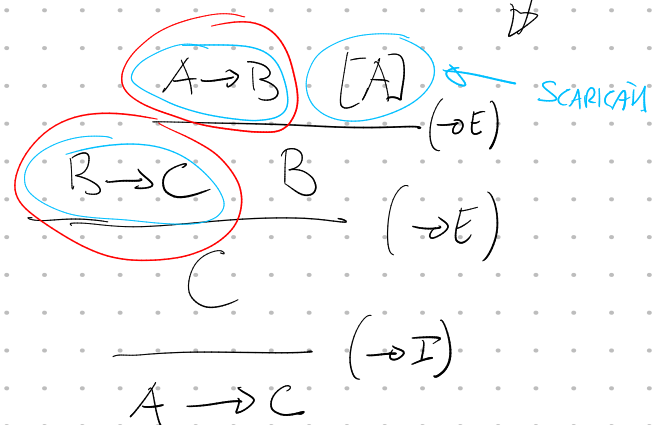
$\frac{x \wedge y}{x} \quad (x \wedge E)$	$\frac{x \wedge y}{y} \quad (x \wedge E)$	$\frac{x \quad y}{x \wedge y} \quad (\wedge I)$
$\frac{x \vee y \quad [x] \quad [y]}{z} \quad (vE)$	$\frac{x \quad y}{x \vee y} \quad (\vee I)$	
$\frac{x \rightarrow y \quad x}{y} \quad (\rightarrow E)$	$\frac{[x] \quad \dots}{x \rightarrow y} \quad (\rightarrow I)$	
$\frac{\perp}{x} \quad (\perp E)$		

LOGICA INTUZIONISTA

REGOLA (VE)



$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$A \rightarrow C$



Teorema

Marco è italiano o svizzero. S
Marco è italiano allora è laureato e
in ingegneria. Se Marco è svizzero,
allora è laureato in Economia. Dunque
Marco è laureato.

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A} \quad (\text{modus tollens}) \quad \approx \triangleright$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow \perp}{A \rightarrow \perp}$$

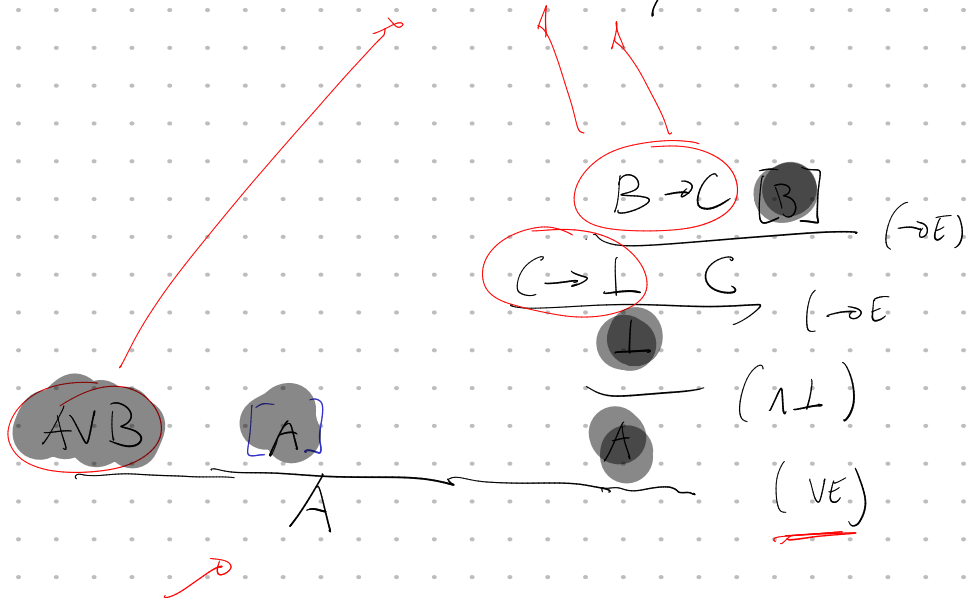
$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

è uguale a prima

$$\frac{\begin{array}{|l} A \vee B \\ B \rightarrow C \\ \neg C \end{array}}{A}$$

$\approx \triangleright$

$$\frac{\begin{array}{|l} A \vee B \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow \perp \end{array}}{A}$$

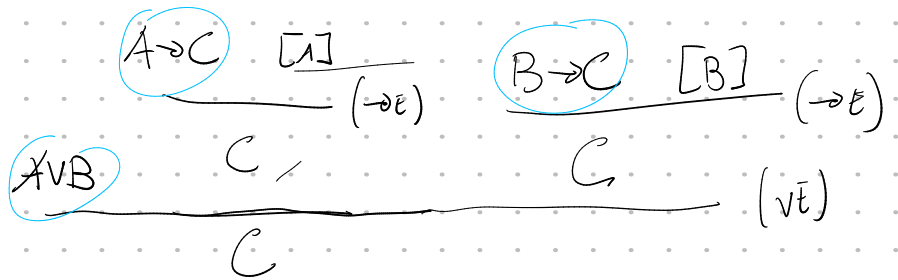
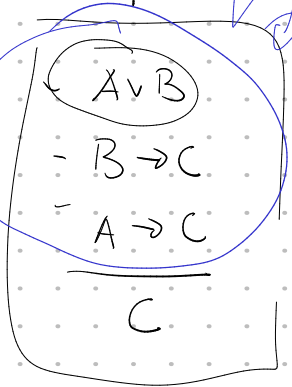


Dim

- Se Mario è italiano, allora è laureato in ingegneria, quindi è laureato.
- Se Mario è svizzero, allora è laureato in economia, quindi è laureato.

Pertanto, indipendentemente dal fatto che Mario sia italiano o svizzero, Mario è comunque laureato.

Esempio



Mario è abo

Mario non è abo

Gli difensori volano

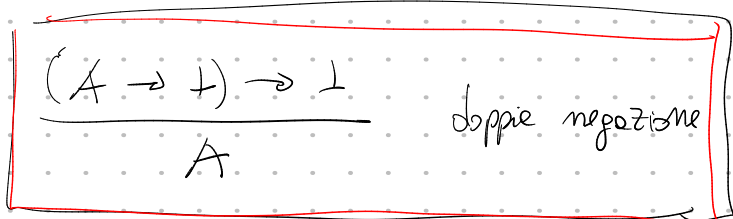
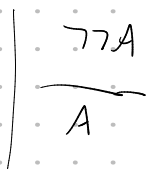
≈

A

$\neg A$
B

(EX FALSO QUOD LIBET)

$$\neg\neg A \equiv \neg(A \rightarrow \perp) \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$$



[¬A]

