Logica – a.a. 2024/25 – Compito di esempio

prof. Gianluca Amato

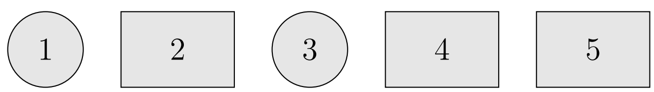
Esercizio 1

Tradurre in forma logica (proposizionale) la seguente inferenza e determinare se si tratta di una inferenza corretta usando le tavole di verità. Se l'inferenza è corretta, dare una dimostrazione in deduzione naturale.

> *Se Carlo è un fan di Goldrake, non potrà fare a meno di guardare Goldrake U. Se Carlo non è un fan di Goldrake, guarderà Goldrake U se e e solo se l'adattamento italiano è di suo gradimento. Carlo non gradisce l'adattamento italiano di Goldrake U, ma lo guarderà lo stesso. Pertanto, Carlo è un fan di Goldrake.*

Esercizio 2

Sia data una segnatura Σ con i simboli di predicato R di arità 2 e P di arità 1, e con una singola costante individuale a. Consideriamo l'interpretazione il cui dominio sono le tessere qui sotto:



e in cui

- a è la tessera 1;
- Px è il predicato "x è tonda";
- Rxy è il predicato "y sta (immediatamente) alla destra di x".

Siano date infine le seguenti formule ben formate:

A. $\neg Pa$

B. $\forall x \exists y Rxy$

C. $\forall x (Px \to \exists y Rxy)$

D. $\exists x (\neg Px \land \forall y (Rxy \to Py))$

Rispondere ai seguenti punti:

1. Riscrivere le formule come proposizioni in linguaggio naturale (italiano), nella forma più naturale possibile.
2. Determinare quali formule sono vere, giustificando il perché.
3. Dare una nuova interpretazione che renda contemporaneamente vere tutte le formule di cui sopra.

Soluzione esercizio 1

Si inizia individuando quali sono le proposizioni semplici che compaiono nell'inferenza. Alcune proposizioni possono comparire sotto forma di enunciati leggermente diversi. Si assegna un simbolo a ciascuna proposizione semplice:

- A: *Carlo è un fan di Goldrake*;
- B: *Carlo guarderà Goldrake U* (o anche, *Carlo non potrà fare a meno di guardare Goldrake U*);
- A: *Carlo gradisce l'adattamento italiano di Goldrake U*;

e si traduce l'inferenza in forma logica.

$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \neg A \to (B \leftrightarrow C) \\ \neg C \land B \end{array}}{A}$$

Costruiamo adesso la tavola di verità.

A	B	C	$A \to B$	$\neg A$	$B \iff C$	$\neg A \to (B \leftrightarrow C)$	$\neg C \land B$	A
F	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	V	V	V	F	V	V	F	V

Abbiamo evidenziato in rosso le righe (ce n'è una sola) in cui tutte le tre premesse sono vere. Poiché per le righe evidenziate anche la conclusione è vera, possiamo concludere che l'inferenza è corretta.

Per quanto riguarda la dimostrazione in deduzione naturale, facciamo prima una dimostrazione a parole, che tradurremo poi nella forma richiesta. Facciamo un ragionamento per casi. Per il principio del terzo escluso, A o è vera o è falsa. Dobbiamo far vedere che, in entrambi i casi, arriviamo alla conclusione che A è vera.

- Se partiamo dall'ipotesi che A sia vera, non c'è niente da dimostrare.
- Se invece partiamo dall'ipotesi che A sia falsa, poiché dobbiamo arrivare a concludere che A è vera, sembra ragionevole aspettarci di dover passare prima per un assurdo. Infatti, se A è falsa, ovvero $\neg A$ è vera, grazie alla premessa $\neg A \to (B \leftrightarrow C)$ e al modus ponens, possiamo concludere $B \leftrightarrow C$. Poiché un'altra premessa ci dice che B è vera, e tenendo conto che $B \leftrightarrow C$ è equivalente alle due implicazioni $B \to C$ e $C \to B$, sempre per modus ponens otteniamo C. Questa, e la premessa, $\neg C$, generano una contraddizione, ed da un contraddizione segue qualunque cosa, anche che A è vera.

Trasformando questo reagionamento a parole in un a dimostrazione formale, otteniamo:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(EM)}
\UnaryInfC{$A \lor \neg A$}
\AxiomC{$[A]$}
\AxiomC{$\neg C \land B$}
\RightLabel{$(E_1\land)$}
\UnaryInfC{$\neg C$}
\noLine
\UnaryInfC{$C \to \bot$}
\AxiomC{$\neg A \to (B \leftrightarrow C)$}
\AxiomC{$[\neg A]$}
\RightLabel{$(E\to)$}
\BinaryInfC{$B \leftrightarrow C$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \to C \land C \to B$}
\RightLabel{$(E_1\land)$}
\UnaryInfC{$B \to C$}
\AxiomC{$\neg C \land B$}
\RightLabel{$(E_2\land)$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$(E\to)$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$(E\to)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(E\bot)$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$(E\lor)$}
\TrinaryInfC{A}
\end{prooftree}
$$

Notare che la dimosrtrazione non usa per nulla la prima premessa, che quindi è inutile ai fini del ragionamento.

Soluzione esercizio 2

Prima di risolvere l'esercizio, pongo l'attenzione al fatto che Rxy vuol dire che y è immediatamente a destra di x. Ad esempio la tessera 3 è immediatamente a destra della tessera 2, ma la tessera 4 **non è** immediatamente a destra della tessera 3. Per non appesantire troppo le frasi in italiano, non userò più l'avverbio "immediatamente" che è da considerare implicito.

Punto 1: traduzione in italiano

A. $\neg Pa$. La traduzione è immediata:

La tessera 1 non è tonda.

B. $\forall x \exists y Rxy$. Possiamo iniziare con una traduzione letterale:

Per ogni tessera x esiste una tessera y che sta alla destra di x.

La frase è ovviamente ben poco naturale. Possiamo procedere quindi, in maniera analoga a quando traduciamo da linguaggio naturale in linguaggio simbolico, a trasformare i quantificatori uno alla volta, questa volta però al contrario, da linguaggio formale a linguaggio naturale. Si procede in questo caso dal quantificatore più interno a quello più esterno. Ad esempio *esiste una tessera y che sta alla destra di x* si può riscrivere in *x ha almeno una tessera alla sua destra*, ottenendo:

Per ogni tessera x, x ha almeno una tessera alla sua destra.

Abbiamo in questo modo rimosso la variabile y. Procedendo allo stesso modo sul quantificatore rimasto si ottiene:

Ogni tessera ha almeno una tessera alla sua destra.

C. $\forall x(Px \to \exists y Rxy)$. Procediamo come prima per raffinamenti successivi.

Per ogni tessera x, se x è tonda, allora esiste una tessera y che sta alla destra di x.
Per ogni tessera x, se x è tonda allora x ha almeno una tessera alla sua destra.
Ogni tessera tonda ha almeno una tessera alla sua destra.

Notare che l'implicazione $Px \rightarrow$ dentro il quantificatore svolge la funzione di limitare il raggio d'azione del quantificatore universale $\forall x$ alle sole tessere tonde.

D. $\exists x(\neg Px \wedge \forall y(Rxy \rightarrow Py))$.

Esiste una tessera x tale che x non è tonda e per ogni tessera y, se y sta alla destra di x allora y è tonda.

Esiste una tessera x tale che x non è tonda e ogni tessera alla destra di x è tonda.

Esiste una tessera che non è tonda tale che ogni tessera alla sua destra è tonda.

Anche qui, il ruolo di $\neg Px \wedge$ è quello di limitare il raggio d'azione del quantificatore esistenziale $\exists x$ alle sole tessere non tonde.

Punto 2: stabilire se le formule sono vere o false

Conviene ragionare sulla traduzione in italiano delle formule che sono più intuitive. Non è sufficiente dare la risposta, ma bisogna anche fornire un minimo di giustificazione.

A. La formula è falsa, perché ovviamente la tessera 1 è tonda!

B. La formula è falsa, perché la tessera 5 non ha niente alla sua destra.

C. La formula è vera, perché le uniche tessere tondo sono 1 e 3, ed entrambe hanno una tessera alla loro destra (le tessere 2 e 4 rispettivamente).

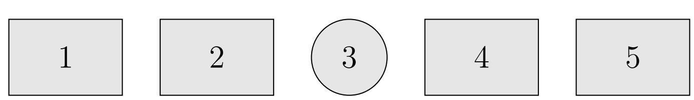
D. La formula è vera, perché la tessera 2 non è tonda. Alla destra (ricordiamo che intendiamo immediatamente a destra) si trova solo la terra 3, che non è tonda.

Punto 3: rendere vere le formule cambiando l'interpretazione

Nello svolgere questo punto dell'esercizio potremmo anche cambiare completamente l'interpretazione, ad esempio usando le regioni italiane come dominio di interpretazione ed apposite proprietà e relazioni sulle regioni per P ed R. Il nostro suggerimento è però di alterare leggermente l'interpretazione fornita.

Nel nostro caso, possiamo agire in due modi: o modificando la disposizione delle tessre, o cambiano proprio il significato di a, P ed R. Considerando ad esempio la formula $\neg Pa$, vari modi alternativi per renderla vera potrebbero essere:

1. cambiare la disposizione delle tessere, in modo che la tessera 1 non sia tonda, ottenendo



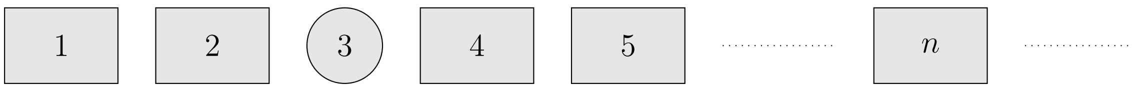
   e lasciare inalterato il significato di a, P ed R.

2. lasciare così com'è la disposizione delle tessere, ed cambiare il significato di a, ad esempio stipulando che a non indica la tessera 1 ma la tessera 2.

3. lasciare così com'è la disposizione delle tessere, ed cambiare il significato di P, ad esempio stipulando che Px significa che x è rettangolare.

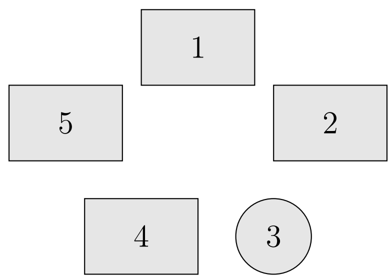
Ovviamente nel fare questi cambiaemnti bisogna stare attenti a non rendere false le formule che prima erano vere. Le prime due modifiche non creano problemi da questo punro di vista, ma la terza sì. Infatti, se P indica che una tessera è rettangolare, la formula C vuol dire *Ogni tessera rettangolare ha una tessera alla sua destra* che è falsa.

Diciamo che approviamo la modifica 1, e cerchiamo adesso di rendere vera la formula B. Una possibilità è quella di inserire a destra della 5 un numero infinito di tessere rettangolari, una dopo l'altra, ottenenendo:



Lasciando inalterato il significato di a, R e P, si vede che questa disposizione rende vera tutte le formule.

In alternativa, si potrebbe invece di pensare le tessere come disposte in un cerchio



e che Rxy voglia dire che *y segue immediatamente x in senso orario*. Anche questa nuova interpretazione rende vere tutte le formule.