

Introduzione alla logica

prof. Gianluca Amato

Modulo di "Logica"
Insegnamento di "Fondamenti di Informatica"
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l'Impresa
a.a. 2023/24

30 gennaio 2024

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

- 1 Logica, inferenze e proposizioni
- 2 Regole di inferenza
- 3 Esempi di regole di inferenza
- 4 Esempi di ragionamenti fallaci
- 5 Logica dei predicati
- 6 Oltre il ragionamento deduttivo

Definizione (Logica)

La **logica** (dal greco *logos*, ovvero “parola”, “pensiero”) è lo studio del ragionamento.

Esempio (Esempi di ragionamento)

Tutti gli uomini sono mortali.

Socrate è un uomo.

Dunque Socrate è mortale.

Ogni numero intero è o pari o dispari

Il numero intero 3 non è pari

Dunque 3 è dispari.



Sono ragionamenti corretti?

Nota

Esistono varie forme di ragionamento, qui siamo interessati al **ragionamento deduttivo**.

La forma principale del ragionamento è quella dell'**inferenza**.

Definizione (Inferenza)

Una **inferenza** è una sequenza di **proposizioni** di cui l'ultima è ottenuta come **conclusione** delle rimanenti, che si assumono come **premesse**.

Esempio



Definizione (Proposizione)

Una **proposizione** è una qualsiasi espressione linguistica per la quale ha senso chiedersi se sia vera o falsa.

Esempio (Proposizioni ✓ o no? ✗)

- Elisa ama Massimo ✓
- Elisa ama Massimo? ✗ (è una *domanda*)
- $4 + 2 = 6$ ✓
- $4 + 2 = 5$ ✓ (è falsa, ma è comunque una proposizione)
- $3 + 5^2$ ✗ (è una *descrizione*)
- Tutti gli uomini sono mortali ✓
- Lazzaro, alzati e cammina! ✗ (è un *ordine*)
- Quel ramo del lago di Como che volge a mezzogiorno ✗ (è una *descrizione*)

Definizione (Principio di bivalenza)

Una proposizione può assumere uno e uno solo dei due **valori di verità**:

- vero (**V**), oppure true in inglese (**T**)
- falso (**F**), oppure false in inglese (**F**)

Nella vita quotidiana, questo principio non sempre si applica:

- è quasi certo che ...
- è probabile che ...
- sono abbastanza sicuro che ...

La logica si occupa anche dei casi in cui il principio di bivalenza non vale, ma non lo faremo in questo corso.

Definizione (Inferenza corretta)

Una inferenza è **corretta** (o **valida**) se ogni qualvolta le premesse sono vere, allora è necessariamente vera anche la conclusione.

Esempio (Inferenza corretta)

$$\begin{array}{c} \textit{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \\ \textit{Stefano non è piemontese} \\ \hline \textit{Carlo è ligure} \end{array}$$

Nota

In alternativa, possiamo dire che l'inferenza è corretta quando è impossibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa.

Non si considerano corrette inferenze che dipendono dalla conoscenza del contesto.

Esempio (Inferenza non corretta)

$$\frac{\text{Marco è pescarese}}{\text{Marco è abruzzese}}$$

dipende dal significato di pescarese e abruzzese

La si può rendere corretta esplicitando le assunzioni di fondo:

Esempio (Inferenza corretta)

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Marco è pescarese} \\ \text{Tutti i pescaresi sono abruzzesi} \end{array}}{\text{Marco è abruzzese}}$$

**Introduzione
alla logica**

**Gianluca
Amato**

Logica,
inferenze e
proposizioni

**Regole di
inferenza**

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

1 Logica, inferenze e proposizioni

2 Regole di inferenza

3 Esempi di regole di inferenza

4 Esempi di ragionamenti fallaci

5 Logica dei predicati

6 Oltre il ragionamento deduttivo

Se rimpiazziamo “Carlo è ligure” e “Stefano è piemontese” con altre proposizioni, otteniamo altre inferenze corrette: quella che importa è solo la struttura sintattica delle proposizioni, chiamata **forma logica**.

Esempio

$$\frac{\text{Carlo è ligure o Stefano è piemontese}}{\text{Stefano non è piemontese}} \\ \text{Carlo è ligure}$$

Il maggiordomo è colpevole o la cameriera è colpevole.
La cameriera non è colpevole

Il maggiordomo è colpevole

Due buchi neri si sono scontrati,
o il rivelatore di onde gravitazionali è rotto.
Il rivelatore di onde gravitazionali non è rotto.

Due buchi neri si sono scontrati.

Mettiamo in evidenza la **forma logica** dell'inferenza.

- usiamo delle **lettere proposizionali**, al posto delle proposizioni;
- lasciamo invariante parole chiavi come "o" e "non", chiamate **connettivi**.

Esempio (Forma logica)

Se si pone $A = \text{"Carlo è ligure"}$ e $B = \text{"Stefano è piemontese"}$:

$$\frac{\begin{array}{c} \text{Carlo è ligure o Stefano è piemontese} \\ \text{Stefano non è piemontese} \end{array}}{\text{Carlo è ligure}} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Regola di inferenza} \\ \text{A o B} \\ \text{non B} \\ \hline \text{A} \end{array}$$

Definizione (Regola di inferenza)

Una inferenza in cui usiamo **lettere proposizionali** invece di proposizioni vere e proprie prende il nome di **regola di inferenza**.

Una regola di inferenza rappresenta tutte le inferenze che si possono ottenere rimpiazzando le lettere proposizionali con delle proposizioni.

- le inferenze ottenute in questo modo si chiamano **istanze** della regola;
- se una regola è corretta, tutte le istanze lo sono.

Esempio

La regola di inferenza

$$\frac{A \text{ o } B \quad \text{non } B}{A}$$

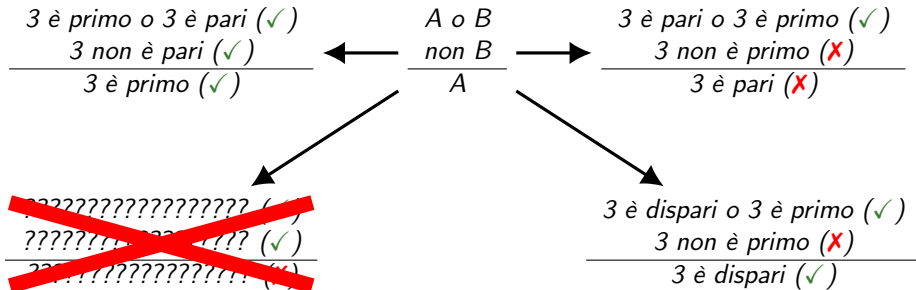
chiamata **regola del sillogismo disgiuntivo** è corretta, quindi la sua istanza

$$\frac{\text{Il maggiordomo è colpevole o la cameriera è colpevole.} \quad \text{La cameriera non è colpevole}}{\text{Il maggiordomo è colpevole}}$$

è corretta.

Bisogna distinguere la correttezza della inferenze dalla verità della conclusione!

Consideriamo alcune istanze della regola vista prima:



Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

- 1 Logica, inferenze e proposizioni
- 2 Regole di inferenza
- 3 Esempi di regole di inferenza
- 4 Esempi di ragionamenti fallaci
- 5 Logica dei predicati
- 6 Oltre il ragionamento deduttivo

Un'altra regola corretta: modus ponens

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \\ \textit{Fabio è pescarese} \end{array}}{\textit{Fabio è abruzzese}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se A allora B} \\ A \end{array}}{B}$$

detta **regola del modus ponens**. Vedi anche:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se sono colpevole devo essere punito} \\ \textit{Sono colpevole} \end{array}}{\textit{Devo essere punito}}$$

Un'altra regola corretta: modus tollens

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \\ \textit{Fabio non è abruzzese} \end{array}}{\textit{Fabio non è pescarese}}$$

Si generalizza nella regola:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se A allora B} \\ \textit{non B} \end{array}}{\textit{non A}}$$

detta **regola del modus tollens**. Vedi anche:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se sono colpevole devo essere punito} \\ \textit{Non devo essere punito} \end{array}}{\textit{Non sono colpevole}}$$

**Introduzione
alla logica**

**Gianluca
Amato**

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

**Esempi di
ragionamenti
fallaci**

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

- 1 Logica, inferenze e proposizioni
- 2 Regole di inferenza
- 3 Esempi di regole di inferenza
- 4 **Esempi di ragionamenti fallaci**
- 5 Logica dei predicati
- 6 Oltre il ragionamento deduttivo

Fallacia della negazione dell'antecedente (1)

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

Consideriamo l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se sono un ladro allora devo essere punito} \\ \textit{Non sono un ladro} \end{array}}{\textit{Non devo essere punito}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se A allora B} \\ \textit{non A} \end{array}}{\textit{non B}}$$

È corretta?

Fallacia della negazione dell'antecedente (2)

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

Se Fabio è pecarese, allora Fabio è abruzzese ✓

Fabio non è pescarese ✓

Fabio non è abruzzese ✗

È corretta?

Questa regola è falsa: pensate al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un **controesempio**. L'inferenza non è corretta.

Ed infatti, se ci pensiamo bene, non è corretta neanche la prima regola di inferenza: magari non sono un ladro, ma devo essere punito per qualche altro motivo.

Fallacia dell'affermazione del conseguente (1)

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

Consideriamo questa inferenza...

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se manca la benzina, allora l'auto non parte} \\ \textit{L'auto non parte} \end{array}}{\textit{Manca la benzina}}$$

che si generalizza nella regola

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se A allora B} \\ B \end{array}}{A}$$

È corretta?

All'apparenza lo sembra, ma consideriamo un'altra istanza della regola.

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Se Fabio è pescarese, allora Fabio è abruzzese} \\ \textit{Fabio è abruzzese} \end{array}}{\textit{Fabio è pescarese}}$$

È corretta?

Questa regola è falsa: pensate di nuovo al caso in cui Fabio sia nato a Chieti.

Abbiamo trovato un **controesempio**. L'inferenza non è corretta.

Ed infatti, se ci pensiamo bene, non è corretta neanche la prima regola di inferenza: magari l'auto non parte perché è scarica la batteria.

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

- 1 Logica, inferenze e proposizioni
- 2 Regole di inferenza
- 3 Esempi di regole di inferenza
- 4 Esempi di ragionamenti fallaci
- 5 Logica dei predicati**
- 6 Oltre il ragionamento deduttivo

Negli esempi visti prima, le regole di inferenza sono a livello di **logica proposizionale**: la loro verità dipende dai legami tra le proposizioni.

Queste inferenze sono più complesse:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è corso} \\ \textit{Tutti i corsi sono francesi} \end{array}}{\textit{Napoleone è francese}}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Socrate è un uomo} \\ \textit{Tutti gli uomini sono mortali} \end{array}}{\textit{Socrate è mortale}}$$

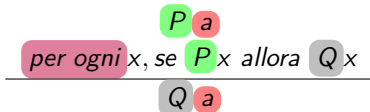
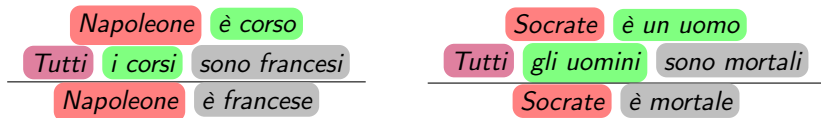
Se analizzate come fatto fin'ora, corrispondo alla regola di inferenza:

$$\frac{A}{\frac{B}{C}}$$

che non è corretta! Bisogna passare alla **logica dei predicati**.

A livello predicativo, la forma logica si ottiene in questo modo:

- **costanti individuali** al posto di individui (Napoleone, Socrate)
- **costanti predicative** al posto di proprietà (essere corso, essere mortale);
- **esiste** o **per ogni** al posto dei quantificatori (tutti, alcuni, ...)



Inferenze corrette e verità delle conclusioni

Come per il caso proposizionale, bisogna distinguere tra correttezza dell'inferenza e verità della conclusione.

Napoleone è francese ✓
Tutti i francesi sono abruzzesi ✗

Napoleone è abruzzese ✗

Napoleone è genovese ✗
Tutti i genovesi sono cinesi ✗

Napoleone è cinese ✗

Napoleone è londinese ✗
Tutti i londinesi sono inglesi ✓

Napoleone è inglese ✗

~~*????????????????????* ✓
???????????????? ✓

???????????????? ✗~~

Napoleone è francese ✓
Tutti i francesi sono corsi ✗

Napoleone è corso ✓

Napoleone è cinese ✗
Tutti i cinesi sono francesi ✗

Napoleone è francese ✓

Napoleone è parigino ✗
Tutti i parigini sono francesi ✓

Napoleone è francese ✓

Napoleone è corso ✓
Tutti i corsi sono francesi ✓

Napoleone è francese ✓

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

- 1 Logica, inferenze e proposizioni
- 2 Regole di inferenza
- 3 Esempi di regole di inferenza
- 4 Esempi di ragionamenti fallaci
- 5 Logica dei predicati
- 6 Oltre il ragionamento deduttivo

Esistono altre forme di “ragionamento”, oltre a quello deduttivo visto finora.

Ragionamento induttivo: dal caso particolare al generale

$$\frac{\textit{Tutti i corvi finora osservati sono neri}}{\textit{Tutti i corvi sono neri}}$$

Ragionamento abduttivo: introduzione di ipotesi esplicative

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{L'assassino ha lasciato tracce di fango} \\ \textit{Chiunque fosse entrato dal giardino, avrebbe lasciato tracce di fango} \end{array}}{\textit{L'assassino è entrato dal giardino}}$$

Nota

Dal punto di vista deduttivo, queste inferenze non sono corrette. L'ultima, in particolare, è propria quella che abbiamo chiamato “fallacia dell'affermazione del conseguente”.

- Ragionamenti induttivi e abduttivi **non sono monotoni**: nuove premesse possono trasformare la conclusione del ragionamento.

L'assassino ha lasciato tracce di fango
Chiunque fosse entrato dal giardino, avrebbe lasciato tracce di fango
Un uomo è stato visto imbrattare appositamente le scarpe di fango

L'assassino non è entrato dal giardino

- Invece il ragionamento deduttivo **è monotono**: se aggiungo nuove premesse, un'inferenza rimane corretta. Per questo il ragionamento deduttivo è il meccanismo principale delle **dimostrazioni matematiche**.
 - si parte da proposizioni assunte vere per principio;
 - gli assiomi di Euclide
 - gli assiomi dei numeri reali
 - se applicano inferenze corrette a premesse corrette per ottenere conclusioni corrette (teoremi)
 - in questo modo il teorema sarà vero per sempre:

<https://youtu.be/L1ED5V7EuFY?si=40FmA0Q4491dCbVQ&t=313>

L'esempio di Charles S. Peirce (1839-1914)

Introduzione
alla logica

Gianluca
Amato

Logica,
inferenze e
proposizioni

Regole di
inferenza

Esempi di
regole di
inferenza

Esempi di
ragionamenti
fallaci

Logica dei
predicati

Oltre il
ragionamento
deduttivo

Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Questi fagioli vengono da questo sacchetto

Questi fagioli sono bianchi

Deduzione

Questi fagioli vengono da questo sacchetto
Questi fagioli sono bianchi

Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi

Induzione

Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi
Questi fagioli sono bianchi

Questi fagioli vengono da questo sacchetto

Abduzione