

Proposizioni semplici

prof. Gianluca Amato

Modulo di "Logica"
Insegnamento di "Fondamenti di Informatica"
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l'Impresa
a.a. 2023/24

26 novembre 2023

Abbiamo visto nella lezione introduttiva che per studiare le inferenze dobbiamo rendere esplicita la **forma logica** delle proposizioni, ovvero ciò che è rilevante per riconoscere il nesso tra premesse e conclusione.

Studieremo quindi più in dettaglio la struttura di una proposizione.

Definizione (Proposizioni semplici e composte)

Una proposizione si dice **semplice** se non contiene al suo interno una parte che è a sua volta una proposizione; in caso contrario si dice **composta**.

Esempio (Proposizioni semplici)

Carlo è ligure

Carlo è più alto di Mario

Tutti gli uomini sono mortali

Esempio (Proposizioni composte)

Non è vero che Carlo è ligure

Marcello è matematico o fisico

Se manca la benzina, l'auto non parte

Proposizioni
semplici

Gianluca
Amato

Proposizioni
semplici del 1°
tipo

Proposizioni
semplici del 2°
tipo

Variabili libere
e vincolate

1 Proposizioni semplici del 1° tipo

2 Proposizioni semplici del 2° tipo

3 Variabili libere e vincolate

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Stefano è italiano

Marco sta leggendo

Carlo è più alto di Massimo

Monza ha più abitanti di Milano

Dario è figlio di Ernesto e Maria

Marcello va a Torino con Claudia

In queste proposizioni interviene:

- una **proprietà**
 - una **relazione binaria**
 - una **relazione ternaria**
 - in generale, una relazione n -aria
- predicati**
- 

Definizione (Proposizioni semplici del primo tipo)

Le **proposizioni semplici del primo tipo** sono proposizioni in cui un predicato ad n argomenti viene applicato ad n individui.

Cosa sia un individuo dipende dal contesto: persone, numeri, pianeti, etc. . .

Ci si può riferire ad un individuo in vari modi:

- tramite un **nome** proprio: Carlo, 13, Giove
- tramite una **descrizione definita** che comunque lo identifica in maniera univoca: il fratello di Michele, 15-2, il pianeta più grande del sistema solare

Esempio (Proposizioni con descrizioni definite)

Il cane di Giovanni è fedele
Il figlio di Aldo ha sposato la sorella di Giuseppe
 $5^2 + 3$ è pari

In logica, nomi e descrizioni definite sono anche chiamati **termini**.

**Proposizioni
semplici**

Gianluca
Amato

Proposizioni
semplici del 1°
tipo

**Proposizioni
semplici del 2°
tipo**

Variabili libere
e vincolate

1 Proposizioni semplici del 1° tipo

2 Proposizioni semplici del 2° tipo

3 Variabili libere e vincolate

Consideriamo queste proposizioni semplici:

Tutti gli uomini sono mortali
Vi è un italiano più alto di due metri
Ogni studente universitario frequenta almeno un corso

Contengono dei **quantificatori**: *tutti*, *ogni*, *vi è*, *almeno*.

Prenderemo in considerazione soltanto due quantificatori:

- **per ogni**, chiamato **quantificatore universale**, che equivale a *tutti*, *ogni*, etc..
“*per ogni* x , ...” significa: tutti gli individui soddisfano ...
- **esiste**, chiamato **quantificatore esistenziale**, che equivale a *vi è*, *almeno*, etc..
“*esiste* x tale che ...” significa: vi è almeno un individuo che soddisfa ...

L'uso di questi due quantificatori richiede l'introduzione di lettere come x , y , z , ..., chiamate **variabili individuali**.

La maggior parte dei quantificatori possono essere riscritti usando solo *per ogni* ed *esiste*.

Esempio (Usare i quantificatori per ogni ed esiste)

Tutti gli uomini sono mortali



Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

Vi è un italiano più alto di due metri



Esiste x tale che x è italiano ed x è alto più di due metri.

Ogni studente universitario frequenta almeno un corso



Per ogni x , se x è uno studente universitario, allora esiste y tale che y è un corso ed x frequenta y

L'uso dei quantificatori *per ogni* ed *esiste* rende esplicita la forma logica di varie proposizioni del linguaggio naturale.

Esempio (Esempio)

La proposizione

Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale.

corrisponde a

- Tutti gli uomini sono mortali
- Gli uomini sono mortali
- Ogni uomo è mortale
- Qualunque uomo è mortale
- Ciascun uomo è mortale
- L'uomo è mortale

Alcune osservazioni.

- 1 Nella lingua comune vi sono alcuni quantificatori **vaghi** di cui non ci occupiamo:

Quasi tutti gli italiani sanno chi è il presidente della Repubblica.

La maggior parte dei nordici ha i capelli biondi.

- 2 Alcuni quantificatori nella lingua italiana sono **ambigui**. Ad esempio:

Se *qualcuno* è buono, allora *qualcuno* lo ama.



Per ogni x, se *x* è buono *esiste y* tale che *y* ama *x*.

La stessa parola “*qualcuno*” gioca due ruoli differenti da quantificatore esistenziale ed universale.

Definizione

Le proposizioni semplici che iniziano con “*per ogni*” si dicono **quantificate universalmente**, quelle che iniziano con “*esiste*” si dicono **quantificate esistenzialmente**.

Definizione (Proposizioni semplici del secondo tipo)

Le **proposizioni semplici del secondo tipo** sono le proposizioni quantificate universalmente o esistenzialmente.

Proposizioni
semplici

Gianluca
Amato

Proposizioni
semplici del 1°
tipo

Proposizioni
semplici del 2°
tipo

Variabili libere
e vincolate

1 Proposizioni semplici del 1° tipo

2 Proposizioni semplici del 2° tipo

3 Variabili libere e vincolate

Analizziamo la proposizione “*Per ogni x , se x è un uomo, allora x è mortale*”.

La frase “ *x è un uomo*” si chiama **funzione proposizionale**. Non è una proposizione perché il valore di verità dipende da chi è x . Il libro li chiama anche, a mio avviso impropriamente, predicati.

Dalla funzione proposizionale “ *x e y vanno a vedere z* ”, possiamo ottenere altre funzioni proposizionali rimpiazzando le variabili con termini:

- *Stefano e y vanno a vedere z*
- *Stefano e y vanno a vedere il derby Milan-Inter*
- *Stefano e Marcello vanno a vedere z*
- ...

Se rimpiazzo tutte le variabili ottengo una proposizione:

- *Stefano e Marcello vanno a vedere il derby Milan-Inter*

Si dice che le variabili x , y e z , nei casi di sopra, sono **libere**.

Le funzioni proposizionali possono essere trasformate in proposizioni:

- rimpiazzando variabili con termini (slide precedente);
- usando i quantificatori.

Per esempio, da “ x ama y ” otteniamo:

- *Elisa ama Massimo*
- *Esiste x tale che x ama Massimo (Vi è qualcuno che ama Massimo)*
- *Per ogni x , x ama Massimo (Tutti amano Massimo)*
- *Per ogni y , Elisa ama y (Elisa ama tutti).*

In queste frasi, non si può rimpiazzare una variable con un nome... la frase seguente non ha alcun significato:

- *Esiste Elena tale che Elena ama Massimo*

Le variabili in questo caso si dicono **vincolate**. I quantificatori **vincolano** le variabili a cui sono applicate.

Il concetto di variabile libera e vincolata non appare solo nella logica, ma anche in altre branche della matematica.

Consideriamo ad esempio la formula

$$\sum_{i=1}^{10} ij$$

In questa formula, l'operazione di sommatoria svolge lo stesso ruolo del quantificatore, vincolando la variabile i . La variabile j è invece libera.

A causa di ciò, il risultato della sommatoria dipende solo dal valore di j : se eliminamo la sommatoria svolgendo il calcolo, otteniamo la formula $55j$ dove compare solo la variabile j .

Come esempio finale, anche l'operazione di integrale definisce una variabile vincolata. Ad esempio, nell'integrale

$$\int_0^1 x^2 dx$$

x è una variabile vincolata.