

Connettivi

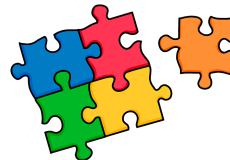
prof. Gianluca Amato

Modulo di "Logica"
Insegnamento di "Fondamenti di Informatica"
Corso di Laurea in Economia e Informatica per l'Impresa
a.a. 2023/24

30 gennaio 2024

Definizione (Connettivo)

Un **connettivo** è un elemento grammaticale che collega un certo numero di proposizioni tra di loro per formare una nuova proposizione.



Esempio

- Roma è la capitale d'Italia **e** Lione è la capitale della Francia
- Roma è la capitale d'Italia **oppure** Lione è la capitale della Francia
- **Se** Roma è la capitale d'Italia **allora** Lione è la capitale della Francia
- **Non è vero** che Roma è la capitale d'Italia.

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

1 Negazione

2 Congiunzione

3 Connettivi vero-funzionali

4 Disgiunzione

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

La **negazione** trasforma una proposizione vera in una falsa e viceversa.

In italiano è di solito resa con:

- “**non è vero che**” prima della proposizione da negare
- “**non**” prima del verbo della proposizione da negare

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

- **Non è vero che** Roma è la capitale d'Italia (✗)
- Roma **non** è la capitale d'Italia (✗)

Dante Alighieri ha scritto “I Promessi Sposi” (✗)

- **Non è vero che** Dante Alighieri ha scritto “I Promessi Sposi” (✓)
- Dante Alighieri **non** ha scritto “I Promessi Sposi” (✓)

Simboli usati per scrivere la negazione:

- not (in inglese e anche in Python)
- $\neg$ (in logica)
- ! (in C, C++, Java, ...)
- un trattino sopra la proposizione da negare (reti logiche)

È possibile descrivere il comportamento della negazione con una **tavola di verità**.

A	$\neg A$
F	V
V	F

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

1 Negazione

2 **Congiunzione**

3 Connettivi vero-funzionali

4 Disgiunzione

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

La **congiunzione** collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando entrambe le proposizioni di partenza sono vere.

In italiano è di solito resa con la parola “e”.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

Parigi è la capitale della Francia (✓)

■ Roma è la capitale d'Italia e Parigi è la capitale della Francia (✓)

$2 + 2 = 4$ (✓)

$3 \times 2 = 5$ (✗)

■ $2 + 2 = 4$ e $3 \times 2 = 5$ (✗)

Congiunzione nella lingua italiana (1)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

Talvolta in italiano si cerca di evitare le ripetizioni, e il connettivo **e** non si trova più tra due proposizioni.

Esempio

Carlo **e** Maria sono appassionati di baseball

è una abbreviazione di

Carlo è appassionato di baseball **e** Maria è appassionata di baseball

Esempio

La partita è avvincente **e** combattuta

è una abbreviazione di

La partita è avvincente **e** la partita è combattuta

Ma attenzione!!! Non tutti gli usi della parola **e** sono istanze della congiunzione.

Esempio

Carlo e Maria sono amici

non è una abbreviazione di

Carlo è amico **e** Maria è amica

Di contro, talvolta la congiunzione è resa da parole diverse da **e**, ad esempio da **ma** (che non per nulla si chiama **congiunzione avversativa**)

Esempio

Roma è la capitale d'Italia **ma** Parigi è la capitale della Francia

Simboli usati per scrivere la congiunzione sono:

- **and** (in inglese e anche in Python)
- **$\wedge$** (in logica)
- **&&** (in C, C++, Java, ...)
- **$\cdot$** (nelle reti logiche, spesso omissso come in algebra)

Questa è la tavola di verità della congiunzione:

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

In realtà la tavola di verità la si può leggere in due modi:

- da sinistra a destra: se sappiamo il valore di verità delle proposizioni di base, possiamo determinare il valore di verità della proposizione risultante.

A è vera e B è falsa $\longrightarrow A \wedge B$ è falsa.

- da destra a sinistra: se sappiamo il valore di verità della proposizione composta, possiamo determinare quasi sono le possibili combinazioni di valori di verità delle proposizioni di base.

$A \wedge B$ è vera $\longrightarrow$ c'è una sola possibilità:

- A vera, B vera

$A \wedge B$ è falsa $\longrightarrow$ ci sono tre possibilità:

- A falsa, B falsa
- A falsa, B vera
- A vera, B falsa

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

**Connettivi
vero-funzionali**

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

1 Negazione

2 Congiunzione

3 Connettivi vero-funzionali

4 Disgiunzione

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

Definizione (Connettivi vero-funzionali)

Un connettivo si dice **vero-funzionale** se il valore di verità della proposizione risultante dipende solo dal valore di verità delle proposizioni di partenza.

- Se un connettivo è vero-funzionale, possiamo descriverlo con la sua tavola di verità, altrimenti no.
- I connettivi visti finora sono tutti vero-funzionali.
- I connettivi che vedremo in futuro saranno vero-funzionali.

Consideriamo il connettivo **mentre**, ad esempio nella proposizione:

- Lucia ha mangiato una mela **mentre** ha guardato la televisione.

Quale sarebbe la tavola di verità di questo connettivo ?

A	B	A mentre B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	?

Non possiamo riempire l'ultima riga della tabella: Lucia ha guardato la TV e mangiato, ma lo ha fatto nello stesso momento o in momenti diversi ?

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

1 Negazione

2 Congiunzione

3 Connettivi vero-funzionali

4 **Disgiunzione**

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

La **disgiunzione** collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando una delle proposizioni di partenza è vera.

In italiano è di solito resa con “o” ed “oppure”.

Esempio

Roma è la capitale d'Italia (✓)

Roma è la capitale della Francia (✗)

- Roma è la capitale d'Italia o Roma è la capitale della Francia (✓)
- Roma è la capitale d'Italia oppure Roma è la capitale della Francia (✓)
- O Roma è la capitale d'Italia oppure Roma è la capitale della Francia (✓)

$$2 + 2 = 5 \text{ (✗)}$$

$$3 \times 2 = 7 \text{ (✗)}$$

- $2 + 2 = 5$ oppure $3 \times 2 = 7$ (✗)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

Consideriamo un esempio simile a quello di prima:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia $\circ$ Lione è la capitale della Francia

È una proposizione piuttosto strana. Nella lingua italiana, utilizziamo la disgiunzione quasi sempre quando le due proposizioni sono strettamente correlate tra di loro, come in:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia $\circ$ Roma è la capitale della Francia

Spesso, in questi casi, abbreviamo la frase, come già visto per la congiunzione

Esempio

Roma è la capitale d'Italia o della Francia

Consideriamo ancora una proposizione un po' innaturale:

Esempio

Roma è la capitale d'Italia **o** Parigi è la capitale della Francia

Cosa ne pensate ? È vera o falsa ?

- se per voi la frase è **vera**, vuol dire che considerate la “o” in senso **inclusivo**
 - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è vera;
 - la disgiunzione inclusiva è vera quando **almeno una** delle proposizioni di base è vera;
- se per voi la frase è **falsa**, vuol dire che considerate la “o” in senso **esclusivo**
 - se entrambe le proposizioni di base sono vere, la disgiunzione è falsa;
 - per voi la “o” introduce una alternativa tra due possibilità, una delle quali deve essere falsa;
 - la disgiunzione esclusiva è vera quando **esattamente una** delle proposizioni di base è vera.

Disgiunzione inclusiva ed esclusiva (2)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

Abbiamo detto prima che la **disgiunzione** collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **una** delle proposizioni di partenza è vera.

In realtà siamo stati imprecisi. Dovremmo dire:

Definizione (Disgiunzione inclusiva)

La **disgiunzione inclusiva** collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **almeno una** delle proposizioni di partenza è vera.

Definizione (Disgiunzione esclusiva)

La **disgiunzione esclusiva** collega due proposizioni tra di loro. La nuova proposizione risultante è vera quando **esattamente una** delle proposizioni di partenza è vera.

Simboli usati per scrivere la disgiunzione sono:

- or (in inglese e anche in Python)
- $\vee$ (in logica)
- `||` (in C, C++, Java, ...)
- `+` (nelle reti logiche)

Questa è la tavola di verità della disgiunzione:

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V (perché inclusiva)

Simboli usati per scrivere la disgiunzione esclusiva:

- xor (in gergo informatico)
- $\underline{\vee}$ in queste slide e nel libro di testo, ma non è una notazione standard
- $\oplus$ (nelle reti logiche)

Questa è la tavola di verità della disgiunzione esclusiva:

A	B	$A \underline{\vee} B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F (perché esclusiva)

Ma la “o” in italiano è inclusiva od esclusiva ?

Spesso il problema non si pone perché, dal contesto, sappiamo che le due proposizioni non possono essere entrambe vere.

Esempio

Se sapete che

- La capitale della California è Sacramento o Los Angeles.

vuol dire che possono essere entrambe capitali ?

Ovviamente no, perché sappiamo che uno stato non può avere due capitali, ma se questa “impossibilità” dettata dal contesto viene meno ?

Esempio

Se sapete che

- La bandiera della California contiene una stella **o** un orso.
- vuol dire che la bandiera può avere entrambe ?

Dipende se la **o** è stata usata in senso inclusivo o esclusivo.

In latino esistono due disgiunzioni, per distinguere i due casi: **vel** per quella inclusiva e **aut** per quella esclusiva. In italiano, se volete essere precisi, potete aggiungere

- **o entrambi**, per indicare l'interpretazione inclusiva;
- **ma non entrambi**, per indicare l'interpretazione esclusiva.

Ad esempio:

- La bandiera della California contiene una stella **o** un orso **o entrambi**.

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

In generale, nella lingua di tutti i giorni, non è chiaro se “o” e “**oppure**” vadano intesi in senso inclusivo o esclusivo.

Tuttavia, in linea di massima:

- se la disgiunzione è l'unico connettivo, essa è tipicamente esclusiva.

Se la mamma dice al figlio

- Puoi comprare un gelato o un pasticcino

intende uno dei due, non entrambi.

- se la disgiunzione appare nell'antecedente di una implicazione (vedremo dopo di cosa si tratta), è tipicamente inclusiva.

Data la proposizione

- se sono laureato in economia o in informatica sono ammesso al concorso
ovviamente si intende che sono ammesso anche se ho entrambe le lauree.

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

Alcune volte In matematica, informatica e nelle scienze sperimentali, le parole “o” e “**oppure**” vanno sempre interpretate in maniera inclusiva. Pertanto:

- la proposizione “ $2 + 2 = 4$ **oppure** 5 è dispari” è vera
- da ora poi, in mancanza di ulteriori indicazioni, le parole “o” e “**oppure**” saranno sempre interpretate in maniera inclusiva.

Riporto una domanda che mi è stata fatta a lezione:

Perché uno dovrebbe affermare “ $2 + 2 = 4$ oppure 5 è dispari” invece di “ $2 + 2 = 4$ e 5 è dispari”?

Ovviamente in questo caso usare “**oppure**” può sembrare stupido, ma solo perché sappiamo a priori che entrambe le proposizioni di base sono vere. Se introduciamo delle variabili, e scriviamo una funzione proposizionale del tipo

$$x < 4 \text{ oppure } x \text{ è pari}$$

non possiamo rimpiazzare “**oppure**” con “**e**” perché il senso della frase cambierebbe completamente.

Il fatto che la disgiunzione in matematica è inclusiva vuol dire che per $x = 2$ la funzione proposizionale di sopra è vera. Se la disgiunzione fosse interpretata in maniera esclusiva, per $x = 2$ la funzione proposizionale sarebbe falsa.

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

1 Negazione

2 Congiunzione

3 Connettivi vero-funzionali

4 Disgiunzione

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

L'**implicazione**, più correttamente chiamata **implicazione materiale**, collega due proposizioni A e B tra di loro. La proposizione risultante è sempre vera, tranne quando la prima è vera e la seconda è falsa (ricorda la definizione di conseguenza logica).

Viene di solito resa in italiano con “**se** A **allora** B ”.

- A è chiamato **antecedente**;
- B è chiamato **conseguente**.

Simboli usati per scrivere l'implicazione:

- $\rightarrow$ (**in logica**) o altri simboli simili come $\Rightarrow$.

Questa è la tavola di verità della implicazione

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Per capire meglio l'implicazione, è utile leggere la sua tavola di verità "da destra a sinistra".

Esempio

Supponiamo di sapere per certo che

- se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa

Quali di queste condizioni si potranno verificare ?

Carla è alla festa	Luca è alla festa	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✓ (dubbi?)
V	F	✗
V	V	✓

Esattamente la tavola di verità dell'implicazione.

Interpretazione dell'implicazione in italiano (2)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

Se avete dubbi sulla seconda riga della tabella di prima è perché spesso in italiano diciamo **se ... allora** ma in realtà intendiamo **se e solo se** (che è un altro connettivo).

Esempio

Supponiamo che un amico ci ha assicurato che:

- **se** piove **allora** vengo a prenderti in macchina

Quali di queste situazioni possono verificarsi (se l'amico mantiene la promessa, cioè se la proposizione di prima è vera) ?

piove	vengo a prenderti	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✓ (sono comunque sorpreso)
V	F	✗ (se accade ci resto male)
V	V	✓

Se proviamo a interpretare la tavola di verità della l'implicazione "da sinistra verso destra", otteniamo spesso qualcosa di poco sensato.

Esempio (Vero o falso?)

- se Roma è la capitale d'Italia allora $3+2=5$ (✓)
- se Roma è la capitale d'Italia allora $3+2=0$ (✗)
- se gli elefanti volano allora $3+2=5$ (✓)
- se gli elefanti volano allora $3+2=0$ (✓)

Queste proposizioni sono abbastanza innaturali:

- non c'è nessuna relazione di causa-effetto tra antecedente e conseguente

In italiano quasi sempre l'uso del **se ... allora** suggerisce un rapporto di causa-effetto tra antecedente e conseguente.

Esempio

Quando diciamo “**se** Carla è alla festa **allora** anche Luca è alla festa” intendiamo che c'è qualche rapporto di causa-effetto tra le due cose.

- Come abbiamo visto, questo più o meno corrisponde all'implicazione materiale.

Se invece diciamo “**non è vero che se** Carla è alla festa **allora** anche Luca è alla festa”, stiamo essenzialmente negando l'esistenza di questo rapporto di causa-effetto, lasciando aperte tutte le possibilità.

- È come non affermare nulla.

Implicazione e rapporti di causa-effetto (2)

Connettivi

Gianluca Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia implicazione

La cosa è diversa se interpretiamo tutti i connettivi secondo il loro significato in logica delle proposizioni.

Esempio

Supponiamo di sapere per certo che

- non è vero che se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa;
- ovvero che “se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa” non è vero;

Quali di queste condizioni si potranno verificare ?

Carla è alla festa	Luca è alla festa	Carla è alla festa $\rightarrow$ Luca è alla festa
F	F	F
F	V	F
V	F	V
V	V	F

Dunque, se “se Carla è alla festa allora anche Luca è alla festa” è falso, l'unica possibilità è che “Carla è alla festa” e “Luca non è alla festa”.

In conclusione,

- l'implicazione nel linguaggio naturale è spesso diversa dall'implicazione materiale;
- l'implicazione materiale è molto usata in matematica, ma quasi sempre nel mondo della logica dei predicati:
 - è difficile trovare affermazioni del tipo “**se** 8 è divisibile per 4 **allora** 8 è divisibile per 2”;
 - è molto più normale trovare “**se** x è divisibile per 4 **allora** x è divisibile per 2”.
- non a caso in Python (e in altri linguaggi di programmazione) esistono gli operatori logici `and`, `or`, `not` ma non esiste una operazione per l'implicazione.

Ad ogni modo,

- nella logica, e quindi in tutto il resto del corso, tutte le volte in cui compare **se** ... **allora** esso va interpretato come implicazione materiale;
- anche quando la trasposizione in logica non è fedele al senso comune.

Altre forme dell'implicazione in linguaggio naturale (1)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

Doppia
implicazione

L'implicazione, nel linguaggio naturale, compare spesso in forme diverse rispetto al **se ... allora**, non sempre immediate da interpretare.

Nella tabella seguente, potete pensare ad A come “ x è divisibile per 4” ed B come “ x è divisibile per 2”. Stiamo un po' barando perché non si tratta di proposizioni bensì di funzioni proposizionali, ma in questo contesto non cambia nulla.

proposizione in italiano	proposizione in simboli
se A allora B	$A \rightarrow B$
A se B	$B \rightarrow A$
A solo se B	$A \rightarrow B$
da A segue B	$A \rightarrow B$
A implica B	$A \rightarrow B$
A è condizione sufficiente per B	$A \rightarrow B$
A è condizione necessaria per B	$B \rightarrow A$
condizione sufficiente per A è B	$B \rightarrow A$
condizione necessaria per A è B	$A \rightarrow B$

In generale, non dovete imparare la tabella a memoria, ma imparare a distinguere quale evento (antecedente) genera quale conseguenza (conseguente).

Alcune osservazioni:

- A **se** B: è solo un modo contorto di scrivere “se B allora A”, ovvero $B \rightarrow A$.
- A **solo se** B: vuol dire che A si può verificare solo se si verifica anche B. Quindi, non appare sappiamo che A è vero, per forza dover essere vero anche B, ovvero $A \rightarrow B$.
- A **è condizione sufficiente per** B: vuol dire che il verificarsi di A è sufficiente, da solo senza nessun'altra informazione, a causare anche B, quindi $A \rightarrow B$.
- A **è condizione necessaria per** B: vuol dire che perché si verifichi B deve necessariamente verificarsi A. Quindi, non appare sappiamo che B è vero, A deve essere pure vero. In sostanza, $B \rightarrow A$.
- **condizione sufficiente per** A **è** B: è un modo un po' contorto di scrivere “B è condizione sufficiente per A”, quindi $B \rightarrow A$.
- **condizione necessaria per** A **è** B: è un modo un po' contorto di scrivere “B è condizione necessaria per A”, ovvero $A \rightarrow B$.

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

**Doppia
implicazione**

1 Negazione

2 Congiunzione

3 Connettivi vero-funzionali

4 Disgiunzione

5 Implicazione

6 Doppia implicazione

La **doppia implicazione** collega due proposizioni tra di loro, ed è vera quando le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità.

In italiano è di solito resa con **se e solo se** o con **è condizione necessaria e sufficiente per**.

Simboli usati per scrivere la doppia implicazione:

- $\leftrightarrow$ (in logica) o simboli simili come $\Leftrightarrow$

Questa è la tavola di verità della doppia implicazione

A	B	$A \leftrightarrow B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Interpretazione della doppia implicazione in italiano (1)

Connettivi

Gianluca
Amato

Negazione

Congiunzione

Connettivi
vero-funzionali

Disgiunzione

Implicazione

**Doppia
implicazione**

Tutti i problemi di corrispondenza tra implicazione e linguaggio naturale continuano a valere per la doppia implicazione. Come sempre, l'interpretazione più semplice è con la lettura "da destra a sinistra".

Esempio

Supponiamo che un amico ci abbia assicurato che:

■ vengo a prenderti in macchina **se e solo se** piove

A parte il fatto che il vostro amico parla in maniera un po' strana... quali di queste situazioni possono verificarsi (se l'amico mantiene la promessa, cioè se la proposizione di prima è vera) ?

vengo a prenderti	piove	si può verificare ?
F	F	✓
F	V	✗
V	F	✗
V	V	✓

Nella lettura “da sinistra a destra” si ottengono sempre cose bizzarre.

Esempio (Vero o falso?)

- Roma è la capitale d'Italia **se e solo se** $3+2=5$ (✓)
- Roma è la capitale d'Italia **se e solo se** $3+2=0$ (✗)
- gli elefanti volano **se e solo se** $3+2=5$ (✗)
- gli elefanti volano **se e solo se** $3+2=0$ (✓)