Fondamenti di Informatica

modulo di Logica Matematica

appello del 1 febbraio 2018 – prof. Gianluca Amato

Tutte le risposte vanno adeguatamente motivate.

1. (13 punti) Determinare, usando le tabelle di verità, quali delle seguenti forme proposizionali sono tautologie.

   $\mathrm{A} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{A}) \qquad (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A}) \qquad ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A} \wedge \mathrm{C}) \to (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$

2. (17 punti) Tradurre in formule ben formate le seguenti affermazioni:

   (a) Tutti sono amici di Carla o di Giulia

   (b) C'è un amico di Giulia che non è amico di Carla.

   (c) Nessuno è più alto di se stesso.

   (d) Tutti sono più alti di Carla.

   (e) Tutti coloro che sono più alti di Giulia sono anche più alti di Carla.

   (f) Tutti gli amici di Giulia che hanno un amico più alto di Carla sono anche amici di Carla.

   (g) Condizione necessaria perché qualcuno sia amico di Luigi è che sia amico di Carla.

3. (3 punti, corretto) Specificare una struttura nella quale tutte le fbf determinate nell'esercizio precedente (tranne la d) sono vere.

Soluzioni

1. Ecco le tabelle di verità di queste tre forme proposizionali:

A	A → A	A → (A → A)
F	T	T
T	T	T

A	B	A → B	B → A	(A → B) → (B → A)
F	F	T	T	T
F	T	T	F	F
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

A	B	C	A → B	(A → B) ∧ A ∧ C	$B \vee C$	(A → B) ∧ A ∧ C → ($B \vee C$)
F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	V	V	V	V	V	V

Dunque, $\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ e $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A} \wedge C \to (B \vee C)$ sono tautologie, mentre $(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to (\mathrm{B} \to \mathrm{A})$ non lo è.

2. Indichiamo con $A(x, y)$ la proposizione "x è amico di y" e con $H(x, y)$ la proposizione "x è più alto di y". Indichiamo gli individui Carla, Giulia e Luigi direttamente con il loro nome. Allora, otteniamo:

   (a) $\forall x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \vee A(x, \mathrm{Carla}))$

   (b) $\exists x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \wedge \neg A(x, \mathrm{Carla}))$

   (c) $\neg \exists x\, H(x, x)$

   (d) $\forall x\, H(x, \mathrm{Carla})$

   (e) $\forall x\, (H(x, \mathrm{Giulia}) \to H(x, \mathrm{Carla}))$

   (f) $\forall x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \wedge \exists y\, (A(x, y) \wedge H(y, \mathrm{Carla})) \to A(x, \mathrm{Carla}))$

   (g) $\forall x\, (A(x, \mathrm{Luigi}) \to A(x, \mathrm{Carla}))$

   La (d) è sicuramente la più complessa, perché richiede due quantificatori annidati. Analizziamola più in dettaglio. La frase "Tutti gli amici di Giulia che hanno un amico più alto di Carla sono anche amici di Carla" si può riscrivere, evidenziando il quantificatore universale, come "Per ogni x, se x è amico di Giulia ed x ha un amico che è più alto di Carla, allora x è amico di Carla". D'altronde, "x ha un amico che è più alto di Carla" si può riscrivere, evidenziando il quantificatore esistenziale, come "esiste y che è amico di x e che è più alto di Carla". Mettendo assieme: "Per ogni x, se x è amico di Giulia ed esiste y che è amico di x e che è più alto di Carla, allora x è amico di Carla", che si traduce immediatamente in simboli come visto sopra.

   La (e) è relativamente semplice, ma bisogna stare attenti a due punti. Intanto, il fatto che si parli di condizione "necessaria", vuol dire che se una persona è amica di Luigi, allora necessariamente è amica di Carla, ovvero che essere amici di Luigi implica essere amici di Carla. Molti studenti nel compito hanno usato erroneamente una doppia implicazione. Il secondo punto a cui stare attenti è che, sebbene nella frase in italiano compaia la parola "qualcuno" che fa pensare ad un quantificatore esistenziale, qui il pronome ha il ruolo di indicare una persona generica, e pertanto sottintende un quantificatore universale.

3. Prima di tutto, il testo originale del compito aveva un problema, perché chiedeva di determinare una struttura nella quale tutte le formule ben formate dell'esercizio 2 fossero vere. Questo è impossibile perché le formule (d) e (c) sono tra loro in contraddizione (la (d) dice che tutti sono più alti di Carla, quindi anche Carla è più alta di Carla, mentre la (c) dice che non

c'è nessuno più alto di se stesso). In questa versione corretta dell'esercizio, non chiediamo più che la (d) sia vera.

Una struttura è data da un dominio D, un elemento del dominio $[\![\alpha]\!]$ per ogni costante individuale α e una relazione n-aria $[\![\Pi]\!]$ per ogni simbolo di predicato Π di arità n. Nelle nostre formule noi abbiamo tre costanti individuali (Carla, Giulia, Luigi) e due predicati binari (A ed H). Diamo allora la seguente struttura:

- $D = \{a, b, c, d\}$;
- $[\![\mathrm{Giulia}]\!] = a$, $[\![\mathrm{Carla}]\!] = b$, $[\![\mathrm{Luigi}]\!] = a$;
- $[\![A]\!] = \{(a, a), (b, b), (c, a), (c, b), (d, a)\}$;
- $[\![H]\!] = \{(c, a), (c, b), (d, b)\}$.

Notare che la struttura che abbiamo fornito è del tutto astratta, non ha niente a che fare con persone, altezze e amicizie. Molte altre scelte erano possibili.

Dobbiamo verificare che con questa struttura tutte le formule dell'esercizio 2, tranne la (d), siano vere. Se volessimo farlo in maniera formale, per ognuna di queste formule F dovremmo calcolare $[\![F]\!]$ usando la Definizione 13 (valore di verità di una fbf) delle dispense. Lo facciamo invece in maniera informale.

(a) $\forall x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \lor A(x, \mathrm{Carla}))$: vuol dire che, qualunque elemento del dominio prendo, esso è nella relazione $[\![A]\!]$ o con $[\![\mathrm{Giulia}]\!] = a$ o con $[\![\mathrm{Carla}]\!] = b$. In altri termini, vuol dire che per ogni elemento x, o la coppia (x, a) o la coppia (x, b) appartiene ad $[\![A]\!]$. È vero.

(b) $\exists x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \land \neg A(x, \mathrm{Carla}))$: vuol dire che esiste un elemento x del dominio che è in relazione $[\![A]\!]$ con a ma non con b, ovvero tale che $(x, a) \in [\![A]\!]$ ma $(x, b) \notin [\![A]\!]$. È vero, basta prendere $x = a$.

(c) $\neg\exists x\, H(x, x)$: vuol dire che non c'è alcun elemento del dominio in relazione $[\![H]\!]$ con se stesso, ovvero che $[\![H]\!]$ non contiene coppie con entrambe le componenti uguali. È vero.

(d) $\forall x\, H(x, \mathrm{Carla})$: vuol dire che tutti gli elementi del dominio sono nella relazione $[\![H]\!]$ con b, ovvero che per ogni x nel dominio, $[\![H]\!]$ contiene la coppia (x, b). È falso perché, ad esempio, $(b, b) \notin [\![H]\!]$.

(e) $\forall x\, (H(x, \mathrm{Giulia}) \to H(x, \mathrm{Carla}))$: vuol dire che, dato un elemento x del dominio, se la coppia (x, a) sta nella relazione $[\![H]\!]$, anche (x, b) sta nella relazione $[\![H]\!]$. Esiste una sola coppia della forma (x, a) in $[\![H]\!]$, la coppia (c, a) con $x = c$. Siccome anche $(c, b) \in [\![H]\!]$, per $x = c$ l'implicazione è vera. Per tutte le altre scelte di x, l'implicazione è vera semplicemente perché il suo antecedente è falso. Dunque, l'implicazione è vera per ogni x nel dominio, quindi la formula nel suo complesso è vera.

(f) $\forall x\, (A(x, \mathrm{Giulia}) \land \exists y\, (A(x, y) \land H(y, \mathrm{Carla})) \to A(x, \mathrm{Carla}))$: cerchiamo di capire se ci sono elementi di d che soddisfano la premessa dell'implicazione. Prima di tutto, gli elementi che soddisfano $A(x, \mathrm{Giulia})$ sono a, c, e d. Se prendo $x = a$, esiste un solo elemento y che soddisfa $A(x, y)$ ed è $y = a$. Tuttavia, con questa scelta di y,

$H(y, \text{Carla})$ è falso perché $(a, b) \notin [\![H]\!]$, quindi per $x = a$ l'antecedente dell'implicazione è falso. La stessa cosa vale per $x = d$. Per $x = c$ abbiamo due scelte di y che soddisfano $A(x, y)$, ovvero $y = a$ e $y = b$, ma nessuna delle due soddisfa $H(y, \text{Carla})$. Dunque l'antecedente dell'implicazione è sempre falso e la formula complessiva è vera.

(g) $\forall x\, (A(x, \text{Luigi}) \to A(x, \text{Carla}))$: anche questa è vera in maniera banale perché non c'è nessun x che soddisfa $A(x, \text{Luigi})$, ovvero, non c'è nessuna coppia del tipo (x, c) in $[\![H]\!]$.