ECONOMETRIA: Laboratorio III

Luca De Angelis

CLASS - Università di Bologna

Programma Laboratorio III

- Analisi della specificazione del modello e test diagnostici:
  - Test per la forma funzionale del modello
    - RESET
  - Test per l'eteroschedasticità
    - White
    - Breusch-Pagan
  - Test per l'autocorrelazione
    - Durbin-Watson
    - Breusch-Godfrey
    - Portmanteau
  - Test di normalità
    - Jarque-Bera
  - Test per la stabilità dei parametri/ Break strutturali
    - Test di Chow
    - Test CUSUM/CUSUMSQ

Esempio: Taylor Rule

Formulazione

- La Taylor Rule è descritta dal seguente modello:

$$i_t = \rho i_{t-1} + \phi_y y_{t-1} + \phi_\pi \pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

  dove i_t rappresenta il tasso di interesse al tempo t, y_t l'output (indice di produzione, PIL) al tempo t e π_t il tasso di inflazione al tempo t.
- Ogni coefficiente in questo modello ha un preciso significato economico:
  - ρ cattura la persistenza del tasso di interesse
  - ϕ_y cattura la risposta della banca centrale a cambiamenti nell'output al tempo $t-1$
  - ϕ_π cattura la risposta della banca centrale a cambiamenti nell'inflazione al tempo $t-1$

Taylor Rule

Su Gretl...

- Importare il file excel TaylorRule.xls
- Scegliere Serie storiche–dati trimestrali.
- Date: 1954:4-2010:1
- Stimare il modello con OLS

Test di specificazione della forma funzionale

Test RESET

- Il test RESET (REgression Specification Error Test) ha lo scopo di valutare la forma funzionale del modello
- Ipotesi nulla di linearità:

$$H_0 : y_t = g(x, \beta) = x'\beta$$

Passi del Test

1. Si stima il modello sotto $H_0 : y_t = x_t'\beta + \varepsilon_t$ e si salvano i valori stimati $\hat{y}_t$,
2. Si stima il modello ausiliario:

$$y_t = x_t'\beta + \gamma_2 \hat{y}_t^2 + \gamma_3 \hat{y}_t^3 + \ldots + \gamma_m \hat{y}_t^m + u_t,$$

3. Test F per la significatività degli m parametri:

$$H_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots \gamma_m = 0$$

Su Gretl

- Dopo aver stimato il modello con OLS
- Test - Reset (Ramsey) - Scegliere tra quadrati e/o cubi $m = \{2, 3\}$

Test di eteroschedasticità

Test di White

- L'obiettivo del test è quello di confrontare le stime OLS in presenza e in assenza di eteroschedasticità.
- L'ipotesi che saggia il test è:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma^2$$

Passi del Test

1. Si stima il modello sotto $H_0 : y_t = x_t'\beta$ e si salva il vettore dei residui: $\hat{\varepsilon} = (\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_n)$
2. Regressione ausiliaria di $\hat{\varepsilon}_t^2$ su tutti i regressori, i regressori al quadrato e i prodotti tra regressori
3. Test F per la significatività dei parametri

In alternativa, $LM = nR^2$ dove R^2 è quello della regressione al passo 2.

Test di eteroschedasticità

Test di White, Esempio

- Data la relazione:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \varepsilon_t$$

- Il test di White si basa sul valore dell'indice R^2 della regressione

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,t} + \alpha_2 x_{2,t} + \alpha_3 x_{1,t}^2 + \alpha_4 x_{2,t}^2 + \alpha_5 x_{1,t} x_{2,t} + \upsilon_t$$

- Sotto l'ipotesi di omoschedasticità la statistica test nR^2 si distribuisce come un χ^2 con 5 gradi di libertà, dove 5 è il numero di regressori nella regressione ausiliaria (esclusa la costante)

Esercizio

- calcolare su Gretl La statistica test di White relativa al seguente modello:

$$i_t = \rho i_{t-1} + \phi_\pi \pi_{t-1} + \phi_y y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

- Passo 1: Stima del Modello con OLS
- Passo 2: Dalla finestra del Modello:
  - Test - LMTEST - Eteroschedasticità - White (o White solo quadrati)

Test di Eteroschedasticità

Test di Breush-Pagan

- Il test di Breush-Pagan è un test più generale del test di White e considera non solo i regressori (x_t') ma tutte le possibili cause di eteroschedasticità.
- L'ipotesi nulla è l'assenza di eteroschedasticità.
- Il test si basa sui seguenti step:
  1. Si calcolano i residui $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\beta} x_t$
  2. Regressione di $\hat{\varepsilon}_t^2$ su $X_t = (1, z_t)'$.
  3. Calcolare la statistica F per la significatività dei coefficienti oppure $LM = nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2_{(m)}$.

Test di Eteroschedasticità

Test BP su Gretl

- Stima OLS del modello
- Test - LMTEST - Eteroschedasticità - Breusch-Pagan

Esercizio

- Calcolare la statistica test di Breusch e Pagan per il modello specificato nella (1).
- L'ipotesi nulla di omoschedasticità può essere rifiutata?

Test per l'autocorrelazione

Test di Durbin-Watson (1950)

- Il test di DW valuta la presenza di autocorrelazione di primo ordine

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \upsilon_t$$

$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho \neq 0$$

- La statistica TEST di DW si ottiene:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(\varepsilon_t^2)} = 2 - 2\frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1})}{\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t^2)} = 2(1 - \hat{\rho})$$

- Per cui, dato che $|\hat{\rho}| < 1$, allora $0 \leq DW \leq 4$
  - $\hat{\rho} = 0 \rightarrow DW = 2$: Assenza di Autocorrelazione
  - $DW < 2$: Autocorrelazione Positiva
  - $DW > 2$: Autocorrelazione Negativa

Test per l'autocorrelazione

Durbin-Watson Su Gretl

- Si stima il modello con OLS
- Test - p-value di Durbin Watson
- Nel menù Gretl: Strumenti - Tavole Statistiche - DW

Test per l'autocorrelazione

Test di Breusch-Godfrey

- Il test BG è più generale del DW e consente di analizzare l'autocorrelazione anche di ordine superiore al primo.
- Ammette la presenza, tra le esplicative, dei ritardi della variabile dipendente

$$y_t = x_t'\beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \phi_p \varepsilon_{t-p} + \upsilon_t, \quad \text{where} \quad \upsilon_t \sim WN\left(0, \sigma_\upsilon^2\right)$$

- Ipotesi nulla del test BG coincide con l'assenza di autocorrelazione:

$$H_0 : \phi_1 = ... = \phi_p = 0$$

Test per l'autocorrelazione

Test di Breusch-Godfrey, Su Gretl

Passi del Test

1. Regressione di y_t su x_t, si salvano i residui $\hat{\varepsilon}_t$
2. Regressione di $\hat{\varepsilon}_t$ su $(x_t, \hat{\varepsilon}_{t-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-m})$
3. Test F per la significatività dei parametri

- Alternativamente $LM = nR^2$ della regressione al passo 2, ricordando che $LM \xrightarrow{d} \chi^2_m$.

Test BG su Gretl

- Stima del modello con OLS (i dati devono essere considerati come serie storiche)
- Ouput OLS - Test - LMTEST - Autocorrelazione

Test per l'autocorrelazione

Portmentau Test

- Il test sui basa sulla somma dei coeffiecienti di autocorrelazione campionari fino al lag p
- Tali coefficienti si calcolano attraverso i residui della regressione OLS di y_t su x_t:

$$\hat{\rho}_p = \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-p}}{\varepsilon_t^2}$$

- Si utilizza la statistica test:

$$Q_m = n \sum_{p=1}^{m} \hat{\rho}_p^2 \xrightarrow{d} \chi_m^2$$

Test per l'autocorrelazione

Portmentau Test, Su Gretl

1. Stima del modello con OLS
2. Test - LMTEST - Autocorrelazione
3. Gretl riporta una modifica della Q_m, la statistica test di Ljung Box

Esercizio

- Testare la presenza di autocorrelazione utilizzando il modello specificato nella (1) e i dati della Taylor Rule

- Il test di Jarque-Bera valuta l'ipotesi nulla che la componente stocastica ε_t si distribuisca normalmente.
  La statistica di JB è data da

$$JB = \frac{T-k+1}{6}\left(\gamma_1^2 + \frac{(\gamma_2-3)^2}{4}\right) \xrightarrow{d} \chi^2(2)$$

- Dove:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \frac{1}{T}\sum\left(\frac{\hat{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_n}{\hat{s}_n}\right)^3; \qquad & \hat{\gamma}_2 = \frac{1}{T}\sum\left(\frac{\hat{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_n}{\hat{s}_n}\right)^4 \\ \bar{\varepsilon}_n &= \frac{1}{T}\sum\hat{\varepsilon}_t; & \hat{s}_n = \sqrt{\frac{1}{T}\sum\left(\hat{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_n\right)^2} \end{aligned}$$

Test di normalità distributiva

Test di Jarque-Bera, su Gretl

- In sintesi $\hat{\gamma}_1$e $\hat{\gamma}_2$ sono gli indici campionari di simmetria e kurtosi dei residui

JB in Gretl

- Dalla finestra del modello OLS:
  - Test - TESTUHAT - Normalità residui
- Oppure dal menù Gretl, dopo aver salvato i residui del modello OLS:
  - Variabile - Test di normalità

Test per la stabilità dei parametri

Break strutturali

- Un break strutturale si verifica quando c'è uno shift in una serie storica.
- Noto t^*, l'istante temporale in cui si presume avvenga il break strutturale si può procedere in due modi:
  - Inserendo opportune variabili dummy
  - Test di Chow
- Menù Gretl–Aggiungi–Dummy per intervallo

Test per la costanza dei parametri

Test di Chow

- Definito t^* il periodo in cui avviene il break strutturale, per effettuare il test di Chow si stimano le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\text{Eq Generale} : y_t &= \beta x_t + \epsilon_t, t = 1, ..., T \\
\text{Eq prima del Break} : y_t &= \beta_1 x_t + \epsilon_{1,t}, t = 1, ..., t^* \\
\text{Eq dopo il Break} : y_t &= \beta_2 x_t + \epsilon_{2,t}, t = t^* + 1, ..., T
\end{aligned}$$

Test per la costanza dei parametri

Test di Chow

- Dopo aver stimato le equazioni, si calcolano le somme dei quadrati dei residui nei tre casi

$$\text{Generale} : SQRGen = \sum_{t=1}^{T} \epsilon_t^2$$

$$\text{Periodo1} : SQR_1 = \sum_{t=1}^{t^*} \epsilon_{1,t}^2$$

$$\text{Periodo2} : SQR_2 = \sum_{t=t^*+1}^{T} \epsilon_{2,t}^2$$

- Determinate le tre quantità, la statistica test di Chow è:

$$CT = \frac{\left(SQRGen - (SQR_1 + SQR_2)\right)/k}{(SQR_1 + SQR_2)\,/\,(T - 2k)}$$

Test per la stabilità dei parametri

Test di Chow, su Gretl.

- Il test sotto l'ipotesi nulla di assenza di break strutturali al tempo t^* si distribuisce come una $F(k, T-2k)$, dove k è il numero di regressori del modello
- In Gretl: Test–Chow–Break Strutturale
- Scegliere l'istante in cui si ipotizza il break, ossia t^*

Esercizio

- Stimare su Gretl il test di Chow per un break al 1985:1 relativo al modello:

$$i_t = \rho i_{t-1} + \phi_\pi \pi_{t-1} + \epsilon_t$$

Test per la stabilità dei parametri

Test CUSUM/CUSUMSQ

- I test CUSUM/CUSUMSQ sono utili nei casi in cui non si conosce il tempo t^* quando avviene il break strutturale
- Dato il modello generale:

$$y_t = \beta x_t + \epsilon_t, \quad t = 1, ..., T \tag{2}$$

e definiamo la somma parziale dei residui

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_t \tag{3}$$

ϵ_t non è direttamente osservabile per cui possiamo considerare i residui stimati

$$\tilde{S}_t = \sum_{i=1}^{t} \tilde{\epsilon}_t \tag{4}$$

Test per la stabilità dei parametri

Residuo ricorsivo

- Il residuo ricorsivo definito come

$$\tilde{\epsilon}_t = y_t - \hat{y}_{t|t+1}, \quad t = 1, ..., T \tag{5}$$

$$\hat{y}_{t|t+1} = \hat{\beta}' x_t \tag{6}$$

$$V[\tilde{\epsilon}_t|X] = \sigma^2[1 + x_t'(x_t'x_t)^{-1}x_t] \tag{7}$$

- Possiamo quindi definire i residui ricorsivi standardizzati

$$\omega_t = \frac{\tilde{\epsilon}_t}{\sqrt{1 + x_t'(x_t'x_t)^{-1}x_t}} \tag{8}$$

Test per la stabilità dei parametri
CUSUM/CUSUMSQ

- Possiamo quindi definire i due test CUSUM e CUSUMSQ

$$CUSUM_t = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=k+1}^{t} \omega_i \quad t = k+1, ..., n \qquad (9)$$

$$CUSUMSQ_t = \frac{\sum_{i=k+1}^{t} \omega_i^2}{\sum_{i=k+1}^{n} \omega_i^2} \quad t = k+1, ..., n \qquad (10)$$

$$(11)$$