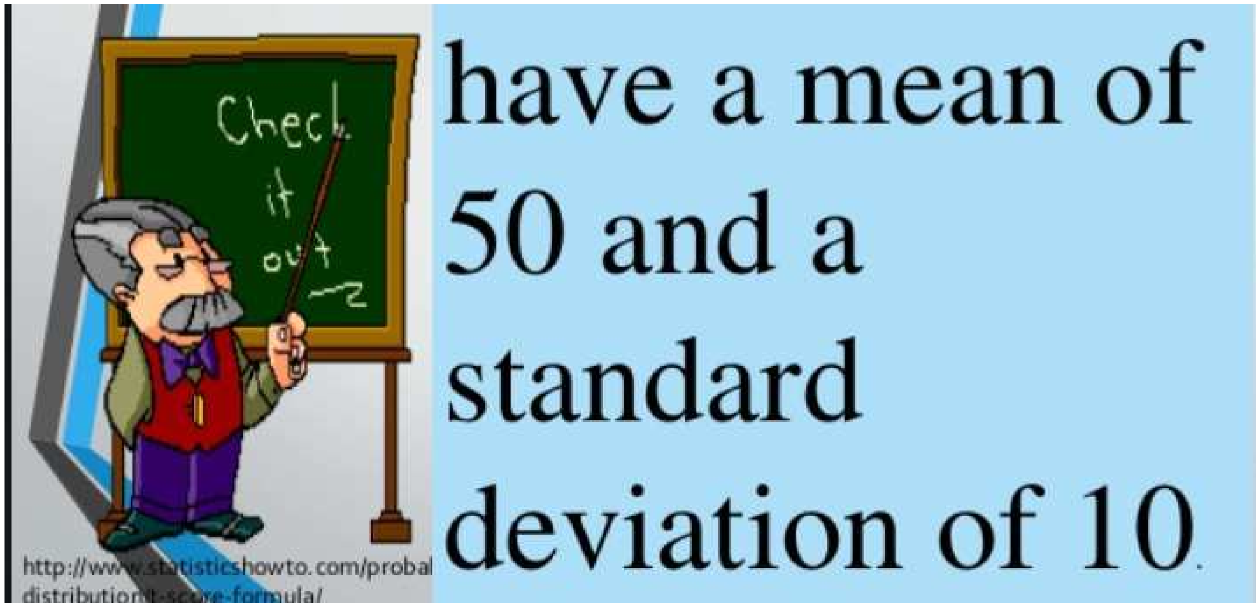
Statistica della Formazione
Slides

A.A. 2020-2021

Docente: ANNA LINA SARRA

Modulo 2 : La standardizzazione dei punteggi



Valutazione nelle prove strutturate

L'analisi e l'elaborazione dei risultati di un test si basa sul conteggio delle risposte esatte, di quelle errate e di quelle non date.

Il punteggio conseguito in una prova viene definito <u>punteggio grezzo.</u>

l'attributo **grezzo** sta ad indicare che con tali punteggi occorre compiere ulteriori elaborazioni (**procedure di standardizzazione)** che permettono confronti <u>**con esiti conseguiti in altre prove dagli stessi allievi o da altri allievi.**</u>

Il punteggio nelle prove strutturate

L'attribuzione del punteggio può essere attuata con procedure molto differenti.

Si può partire dalla più semplice (dicotomizzazione), assegnando un punto alla risposta corretta, zero punti alla risposta sbagliata.

Si possono adottare procedure più elaborate, con diversi gradi di complessità:
valutare le risposte con punteggi diversi (peso) che tengano conto della difficoltà dell'item;
penalizzare le risposte errate.

.

La Valutazione considerando solo il singolo individuo

Ottenuto il punteggio grezzo, l'operazione successiva consiste nell'assegnare il voto. Essa può essere realizzata in vari modi.

Ad esempio, nel caso di test somministrati ad un gruppo limitato di studenti, è possibile ricavare il voto, impostando una semplice proporzione.

Il punteggio grezzo

Il punteggio grezzo di per sé ci dice solo quante risposte corrette un allievo ha dato ad una prova.
Per sapere quanto erano le errate, dobbiamo conoscere il massimo teorico.

Per avere maggiori informazioni da questo punteggio grezzo possiamo:

✓Confrontarlo con quelli ottenuti dal gruppo in cui l'allievo è inserito

✓- Confrontarlo con quello ottenuto da un gruppo normativo, un campione della popolazione di riferimento.

Come rendere confrontabili punteggi conseguiti in prove diverse

Non ha senso confrontare i risultati riportati in test diversi impiegando come confronto i punteggi grezzi in quanto questi esprimono situazioni diverse.

Per effettuare un confronto è necessario che i punteggi grezzi vengano trasformati in punteggi standardizzati cioè sulla stessa scala di misura.

Si impiega come **scala di misura σ**

Trasformazione dei punteggi

Rende paragonabili distribuzioni diverse tra loro, consentendo, quindi, di confrontare la prestazione di uno o più soggetti a test diversi.

ESEMPIO:

Trasformando i punteggi, è possibile confrontare la prestazione di un soggetto che ha ottenuto un punteggio uguale a 30 in un test, la cui gamma di punteggi va da 0 a 50, con la prestazione di un soggetto che ha ottenuto un punteggio uguale a 20 in un test la cui gamma va da 10 a 30.

I principali metodi di trasformazione sono:

I PUNTI Z

I PUNTI T

LA DISTRIBUZIONE PENTENARIA

E RANGHI PERCENTILI

Standardizzazione dei punteggi

È una trasformazione che consente di <u>trasformare il Punteggio grezzo di un test in Unità Standard.</u>

- ✓si può capire se un soggetto ha ottenuto un punteggio basso medio o alto
- ✓- si possono confrontare i punteggi ottenuti in test diversi o in diversi soggetti
- ✓- si possono fare inferenze sui punteggi

I punteggi Z

Il punto standard, detto anche punto z, punteggio standardizzato o punteggio tipificato, definisce la posizione di un allievo all'interno della sua classe in termini di "quanti scarti tipo sopra o sotto la media della classe" l'allievo si trova.
Viene calcolato con la formula:

$$\boxed{z = \frac{X - \overline{X}}{s}}$$

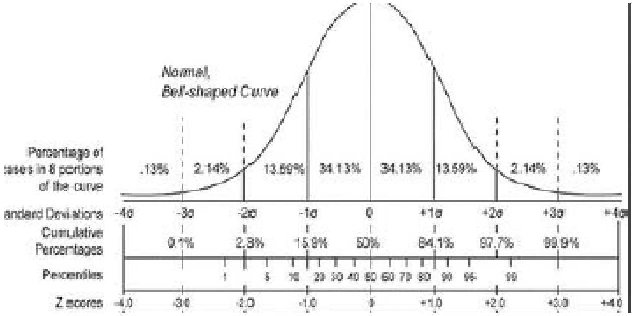
Se z è positivo il voto "grezzo" (non standardizzato) dello studente è superiore alla media, viceversa per z negativo.

Se z è vicino allo zero il voto "grezzo" dello studente è vicino alla media della classe.

La media della distribuzione di tutti i punti z è pari a zero e lo scarto quadratico medio è pari a 1.

I punteggi Z

I punteggi z, a differenza dei valori originali, permettono di confrontare la posizione di un qualunque soggetto nella distribuzione di un carattere con la posizione dello stesso soggetto nella distribuzione di un altro carattere.



$$z = \frac{\text{P. studente} - \text{P. medio classe}}{Deviazione\_standard\_classe}$$

Nel caso in cui si trasformano i punteggi osservati in punteggi z si ottiene una particolare curva che ha media uguale a 0 (μ = 0) e la deviazione standard uguale a 1 (σ= 1) ed è chiamata distribuzione normale standardizzata.

Dai punteggi al voto standardizzato

I punteggi ottenuti attraverso una misurazione risultano di difficile interpretazione se presi in stessi. Affinché acquistino significato è necessario confrontarli con una distribuzione di frequenza di punteggi nota oppure con un gruppo di controllo.

ESEMPIO:

il punteggio 62 in una prova non ci dice in sé se sia un punteggio positivo o meno. Può essere veramente negativo se la maggioranza degli studenti ha preso 100, ma potrebbe anche darsi che il punteggio sia il migliore fra tutti.

Solo una volta definita la distribuzione dei punteggi del gruppo di riferimento, questo dato diventa realmente significativo.

I punti z

Con la trasformazione in punti z si esprime il punteggio di un soggetto in termini di distanza dalla media, utilizzando la devianza come unità di misura.
Un punto z si calcola sottraendo la media dei punteggio ad un punteggio e dividendo per la deviazione standard

$$z = \frac{X_j - X_{pop}}{s_{pop}}$$

$$z = \frac{62-50}{6} = +2,00$$

Quindi il punteggio 62 viene trasformato in un punteggio **z = 2, il che significa che esso è di 2 deviazioni standard superiore alla media**. Se, invece, il punteggio fosse stato di 48, esso sarebbe risultato uguale a -2, cioè inferiore alla media di due deviazioni standard.

Esempio

Un bambino ottiene i seguenti punteggi su due diversi test:

Scrittura di parole	$X = 12$	
Scrittura di non-parole	$X = 10$	

I dati riportati nel manuale della batteria indicano che la prestazione alle tre prove del campione normativo di seconda elementare, è la seguente:

Scrittura di parole	$\overline{X} = 14.5$	$s = 5.0$
Scrittura di non-parole	$\overline{X} = 12.5$	$s = 1.2$

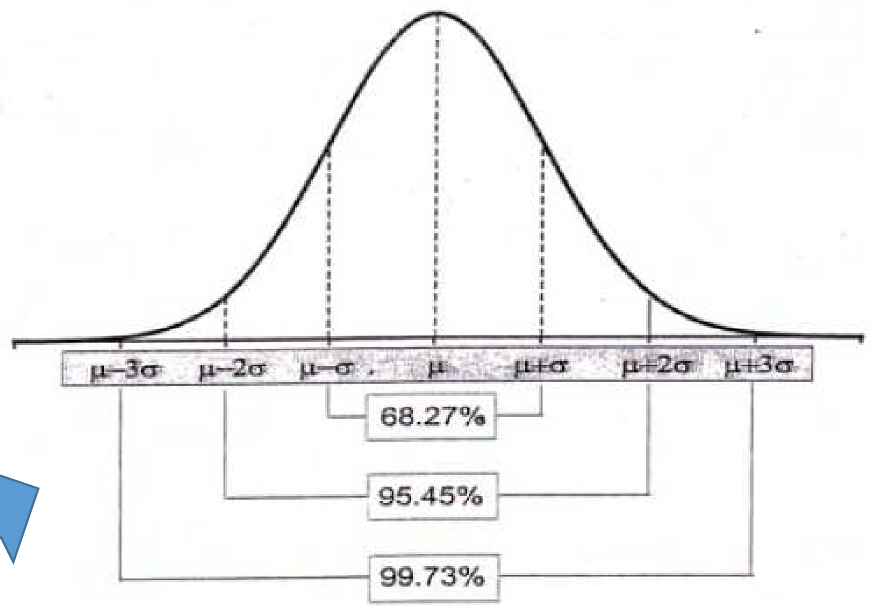
Trasformando i dati grezzi del bambino in punti z:

Scrittura di parole	$z = (12 - 14.5) / 5.0 = - 0.5$
Scrittura di non-parole	$z = (10 - 12.5) / 1.2 = - 2.1$

		Media		
-2	-1	0	1	2
Non parole (-2.1)	Parole (-0.5)			

La distribuzione normale standardizzata

La distribuzione normale standardizzata è caratterizzata dal fatto di avere media aritmetica pari a zero e scarto quadratico medio pari ed uno cioè $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Inoltre, l'area totale sotto la curva è pari ed 1,00.



Esiste una percentuale fissa di casi che cadono tra due ascisse sotto la curva

La distribuzione normale standardizzata

Per comprendere meglio il significato della trasformazione *z, richiamiamo alcune delle sue* principali proprietà. Tutte queste proprietà sono facilmente dimostrabili.

1. La somma dei punteggi z è zero:

$$\Sigma z = 0.$$

2. La media dei punteggi z è zero:

$$z = \frac{\sum z}{N} = 0.$$

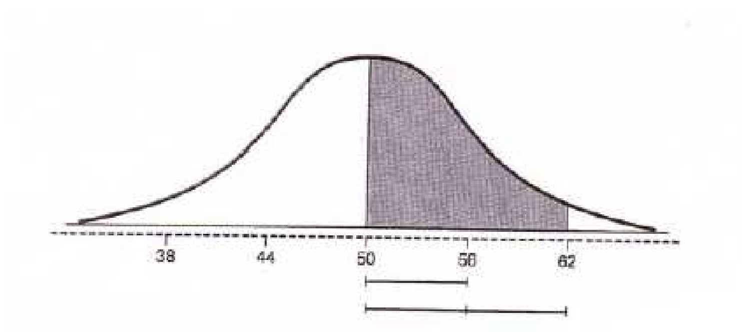
3. La somma dei quadrati dei punteggi z è N.

$$\sum z^2 = \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{s^2} = \frac{1}{s^2} \cdot \sum (X - \overline{X})^2$$

4. Lo scarto quadratico medio e la varianza dei punteggi z è 1. Cioè

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum (z - \overline{z})^2}{N} = \frac{\sum z^2}{N} = 1.$$

Una possibile distribuzione di punteggi con media uguale a 50 è deviazione standard 6.



Esempio

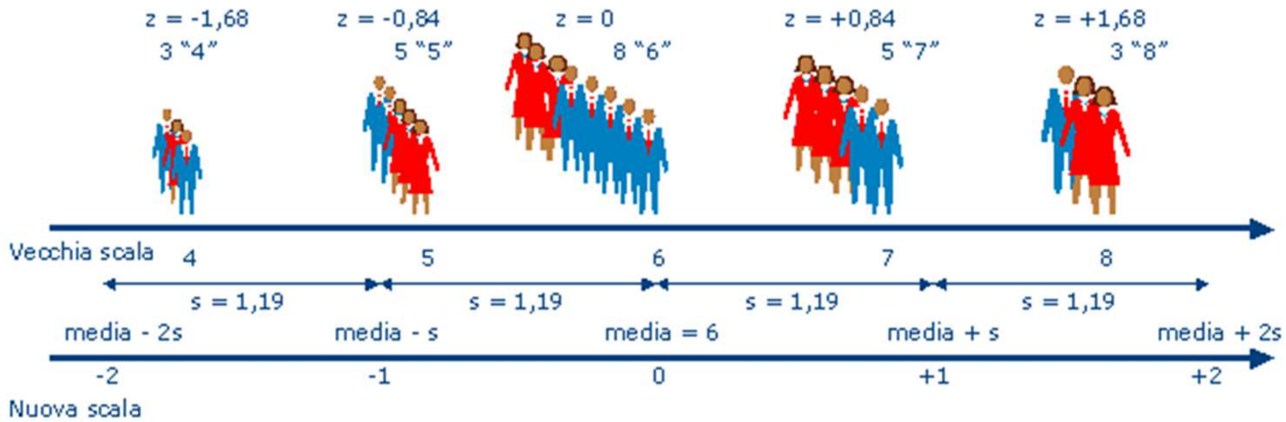
Supponiamo di avere la seguente distribuzione di voti:

Voto	Frequenza semplice
4	3
5	5
6	8
7	5
8	3

Gli studenti con voto 5 in questo esempio hanno un punteggio z di:

Z = (5-6)/1,19 = -0,84

Essi si trovano a 0,84 scarti tipo al di sotto della media.

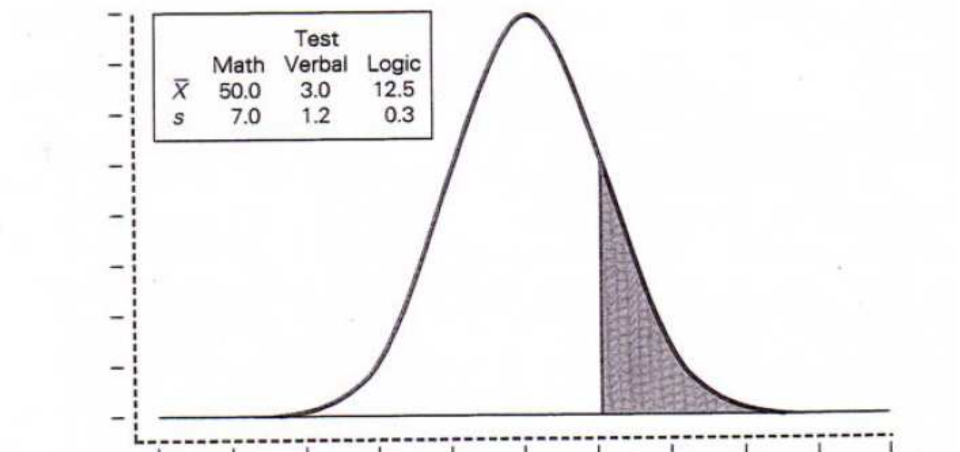


Confronto tra i punteggi di test differenti

La trasformazione dei punteggi di test differenti in punteggi *z* consente di confrontare tra di loro i risultati di test differenti. In generale due test si presentano spesso differentemente sia per la loro struttura (numero di questioni, punteggi assegnati, ecc.), sia perché applicati a popolazioni assai diverse tra loro.

Consideriamo come esempio
l'applicazione di tre test:

- un test di matematica,
- un test verbale
- un test di logica



z-score	−5.00	−4.00	−3.00	−2.00	−1.00	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
Math test	15.0	22.0	29.0	36.0	43.0	50.0	57.0	64.0	71.0	78.0	85.0
Verbal test	−3.0	−1.8	−0.6	0.6	1.8	3.0	4.2	5.4	6.6	7.8	9.0
Logic test	11.0	11.3	11.6	11.9	12.2	12.5	12.8	13.1	13.4	13.7	14.0
Percentile	0.00	0.00	0.13	2.28	15.87	50.00	84.13	97.72	99.87	99.99	99.99

Esempio

Si vogliono confrontare le risposte di 5 soggetti a due test, uno con gradazione da 1 a 7 e uno con gradazione da 1 a 5.

S = 4, 7, 3, 1, 5

C = 2, 5, 3, 1, 3

S.: media = 4 dev.st. = 2.23

C.: media = 2.8 dev.st. = 1.48

z_{s1} = (4-4)/2.23 = 0;

z_{s2} = (7-4)/2.23 = 1.34;

z_{s3} = (3-4)/2.23 = -0.45;

z_{s4} = (1-4)/2.23 = -1.34;

z_{s5} = (5-4)/2.23 = 0.45;

z_{c1} = (2-2.8)/1.48 = -0.8;

z_{c2} = (5-2.8)/1.48 = 1.49;

z_{c3} = (3-2.8)/1.48 = 0.14;

z_{c4} = (1-2.8)/1.48 = -1.22;

z_{c5} = (3-2.8)/1.48 = 0,14;

Esempio

	Test 1	media 10	dev st 4	Test 2	media 70	dev st 15
	Memoria	Norme		Vocabolario	Norme	
	Pg	Pg-Media	Z	Pg	Pg-Media	Z
Giulio	15	5	1,25	65	-5	-0,33
Sabrina	18	8	2,00	85	15	1,00
Mario	10	0	0,00	40	-30	-2,00
Silvia	8	-2	-0,50	70	0	0,00

✓Qual è la probabilità che Sabrina abbia una memoria superiore alla media?

✓ Qual è la probabilità che Sabrina e Silvia abbiano diverse abilità di memoria ?

✓ La prestazione di Mario nella memoria e nel vocabolario sono statisticamente differenti?

I punti z in Excel

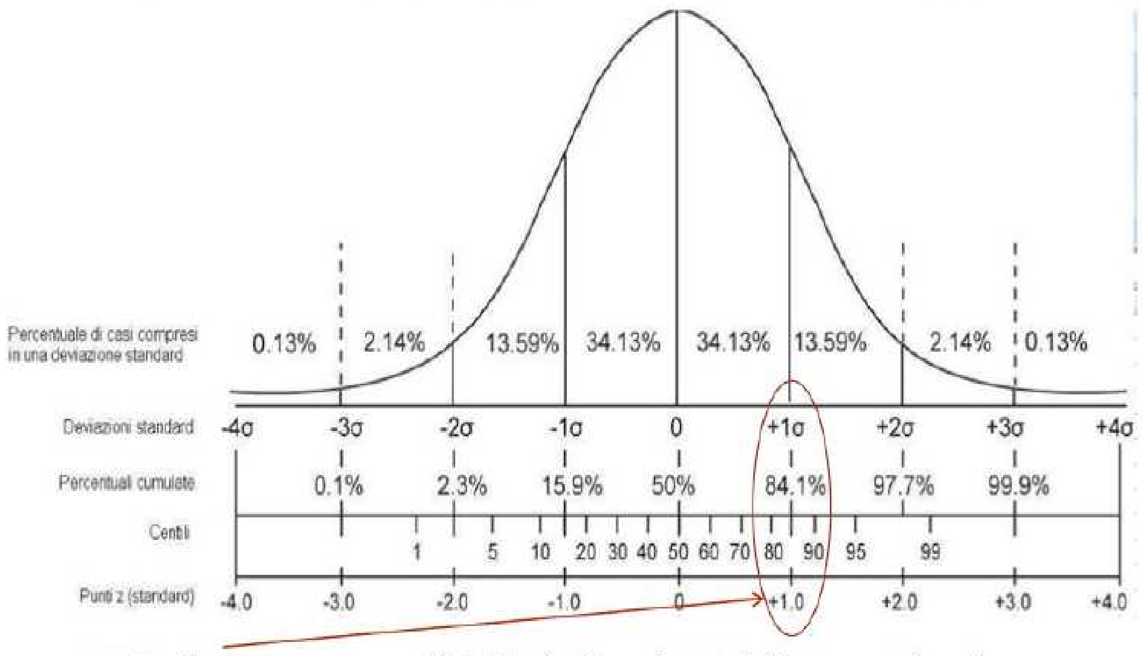
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4		codice studente	punteggi grezzi	punti Z			
5		1	25	=(C5-$G$6)/$G$7			
6		2	25	1,1		media	19,3
7		3	24	0,9		dev.st.pop.	5,1
8		4	21	0,3			
9		5	12	-1,4			
10		6	20	0,1			
11		7	23	0,7			
12		8	15	-0,8			
13		9	18	-0,3			
14		10	10	-1,8			

Si calcolano anche con la funzione NORMALIZZA
(funzioni statistiche).

Esempio

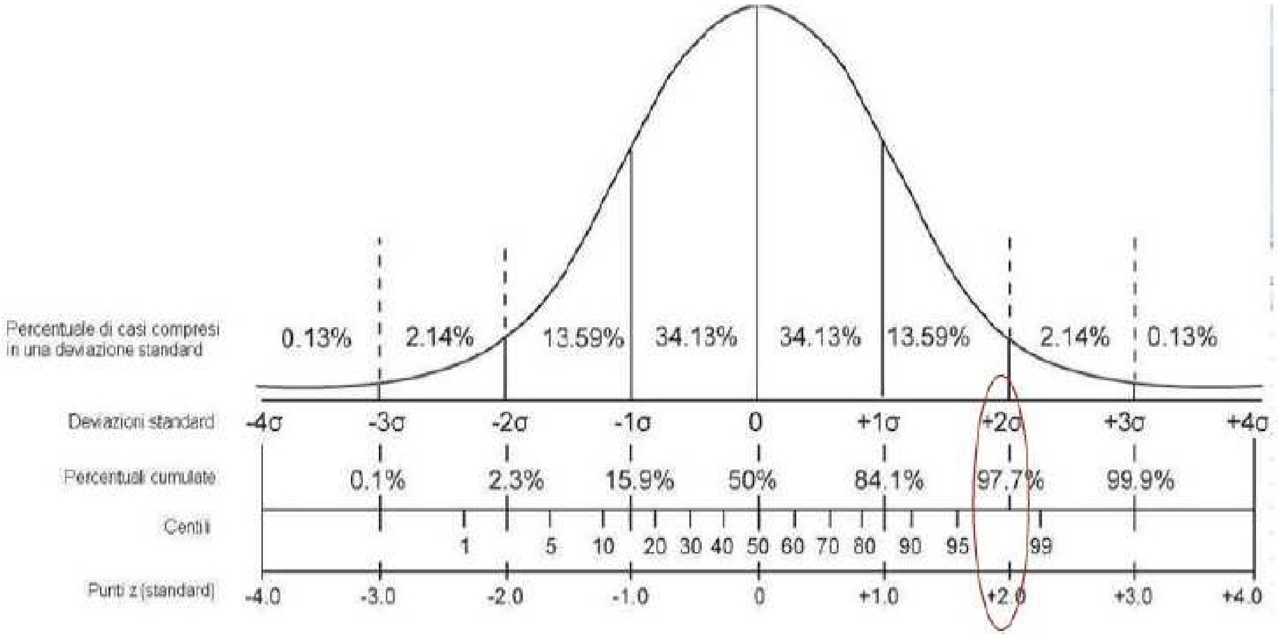
Lorenzo è un bambino di 9 anni che frequenta la IV elementare ed ha ottenuto 1.02 punti z in una prova standardizzata di matematica.

Che % di bambini scolarizzati di 9 anni ha un punteggio inferiore a quello di Lorenzo nella stessa prova di matematica?



Lorenzo supera circa l’80% dei bambini della sua età nel punteggio di matematica (ed è “superato” dal restante 16%).

In una distribuzione normale



- Il 97.5% della distribuzione corrisponde a z=1.96
- z=2 corrisponde al 97.7% della popolazione

I punteggi z vantaggi

- I punti z al di sotto della media avranno segno negativo, quelli corrispondenti alla media saranno pari a 0 e quelli superiori alla media avranno segno positivo

- L'unità di misura utilizzata è pari ad una deviazione standard

- I punti z altrimenti detti standard sono posizionati una scala ad intervalli : è possibile quindi eseguire operazioni matematiche su di essi (ad esempio sommare diversi punti z tra loro, magari quelli di uno stesso studente a prove diverse e poi calcolarne la media)

I punteggi z svantaggi

- Non è possibile affidarsi completamente ai punti z su comparazioni tra prove diverse se la popolazione di riferimento degli studenti considerati non presenta uguali medie e dispersioni negli obiettivi cognitivi considerati.

- Il segno negativo è una complicazione nei calcoli.

- La deviazione standard è una unità di misura piuttosto ampia, se si considera che in una distribuzione normale il 68 % dei punteggi (ossia dal 16 all'84 centile) è compreso tra -1σ e $+ 1\sigma$ dalla media.

I punti T

I punti T assegnano convenzionalmente **valore 50 alla media** e alla deviazione standard valore 10

$$T = 50 + 10\frac{x-\bar{x}}{s}$$

La denominazione “punti T” venne data da W.A. McCall nel 1922 in onore del suo professore E.L. Thorndike (cfr. W.A. McCall, How to measure in Education NY, Macmilian, 1922)

C	D	E	F
codice studente	pt grezzo	punti T	
1	10	=((D6-$D$16)*10)/$D$17+50	
2	12	47	
3	11	44	
4	14	52	
5	20	67	
6	7	34	
7	14	52	
8	18	62	
	pt grezzo	punti T	
media	13,3	50	
dev st	4,0	10	

Punti z e punti T

$$T = 50 + 10\frac{x - \bar{x}}{s}$$

In Excel bisogna inserire le parentesi

=normalizza(x;media;dev.st)*10+50

=((x-media)/dev.st)*10+50

=((x-media)*10)/dev.st+50

$$T = 50 + 10z$$

In Excel non serviranno parentesi

=50+10*cella.z

$$z = \frac{T - 50}{10}$$

In Excel bisogna inserire le parentesi

=(cella.T-50)/10

Distribuzione pentenaria

La distribuzione pentenaria è sistema di punteggi fondato sulla deviazione standard (e uso della media) molto in uso negli Stati Uniti.
Classifica i punteggi in 5 fasce, ordinate in modo decrescente.

Ogni fascia ha il valore di una deviazione standard.
La fascia identifica "il posto" che occupa un determinato punteggio rispetto agli altri.
I punteggi che cadono nelle prime tre fasce sono accettabili.
I punteggi che si collocano nelle restanti due non lo sono.

La distribuzione pentenaria come si ottiene

si utilizzano i valori della media e della deviazione standard della distribuzione

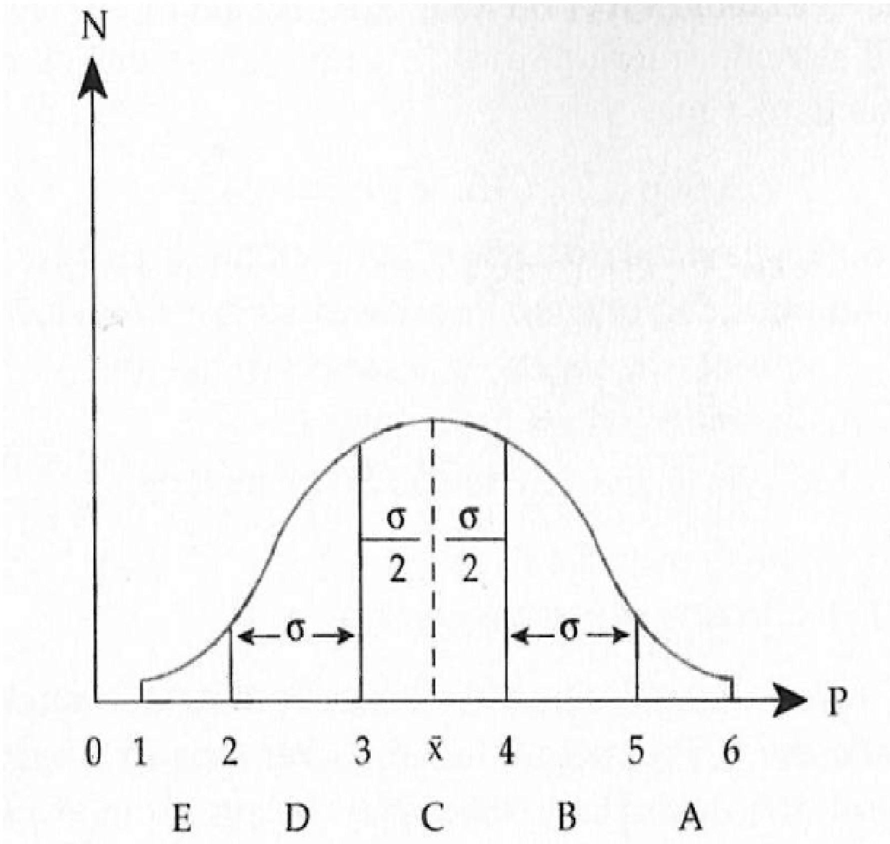
Le fasce sono 5: A, B, C, D, E

Le prove che si collocano nella fascia A sono le migliori, quelle nella fascia B un po' meno di quelle in A, quelle C un po' meno di quelle in B e via di seguito…

Si individua prima la fascia centrale C che comprende i punteggi grezzi che cadono nell'intervallo da $\bar{x} - 0{,}5\,\sigma$
fino a $\bar{x} + 0{,}5\,\sigma$
ossia in un intervallo di una deviazione standard a cavallo della media (punti 3 e 4)

Distribuzione pentenaria

- poi si aggiunge al limite superiore della fascia C una deviazione standard e si ottiene il limite superiore della fascia B (punto 2)
- allo stesso modo si sottrae una deviazione standard al limite inferiore della fascia C e si ottiene il limite superiore della fascia D (punto 5)
- i punteggi che superano il limite superiore della fascia B, sono nella fascia A (il livello di rendimento più alto)
- i punteggi inferiori al limite inferiore della fascia D sono da considerarsi in fascia E (i risultati più scarsi)



La distribuzione pentenaria

Punto sulla distribuzione pentenaria

Deriva da un’operazione di ricodifica del punto standard in cinque categorie, secondo la tabella seguente:

PUNTEGGIO Z	CATEGORIA DELLA DISTRIBUZIONE PENTENARIA
DA -2.5 A -1.5	E
DA -1.5 A -0.5	D
DA -0.5 A +0.5	C
DA +0.5 A +1.5	B
DA +1.5 A +2.5	A

- Un allievo che ha ottenuto un punteggio standardizzato di -0.895 ad un test, ha un punto sulla distribuzione pentenaria pari D

La distribuzione pentenaria

- Supponiamo di avere una distribuzione in cui la media è 56,9 e la deviazione standard è 11,14

FASCE	INTERVALLI DI PUNTEGGIO
A	Maggiore di ...
B	Da ... a ....
C	Da ... a ....
D	Da ... a ....
E	Minore di ...

La distribuzione pentenaria

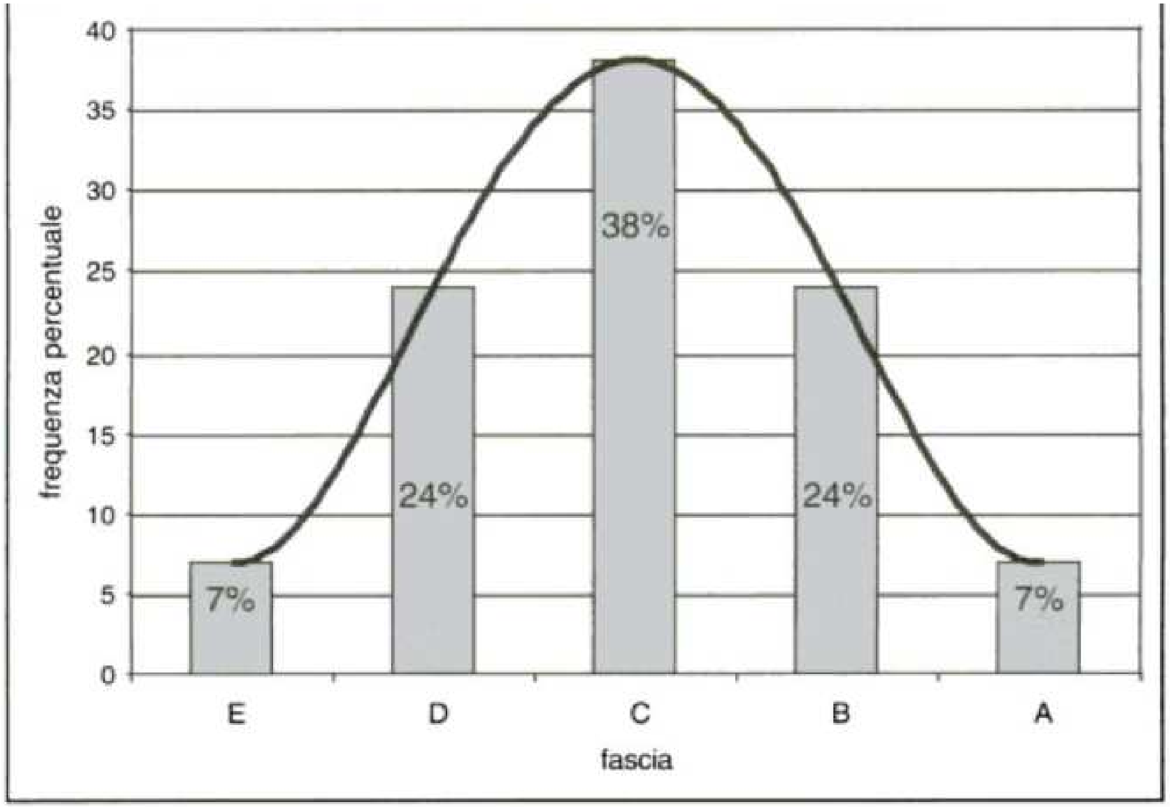
Calcolo delle 5 fasce:

- C => compresa tra 59,6 – 5,57 e + 5,57 = 54,03 e 65,17
- B => tra 65,17 e 65,17 + 11,14 ossia 65,17 e 76,31
- A => superiori a 76,31
- D => tra 54,03 e 54,03 – 11,14 ossia 54,03 e 42,89
- E => inferiori a 42,89

FASCE	INTERVALLI DI PUNTEGGIO
A	Maggiore di 76,31
B	Da 65,17 a 76,31
C	Da 54,03 a 65,17
D	Da 54,03 a 42,89
E	Minore di 42,89

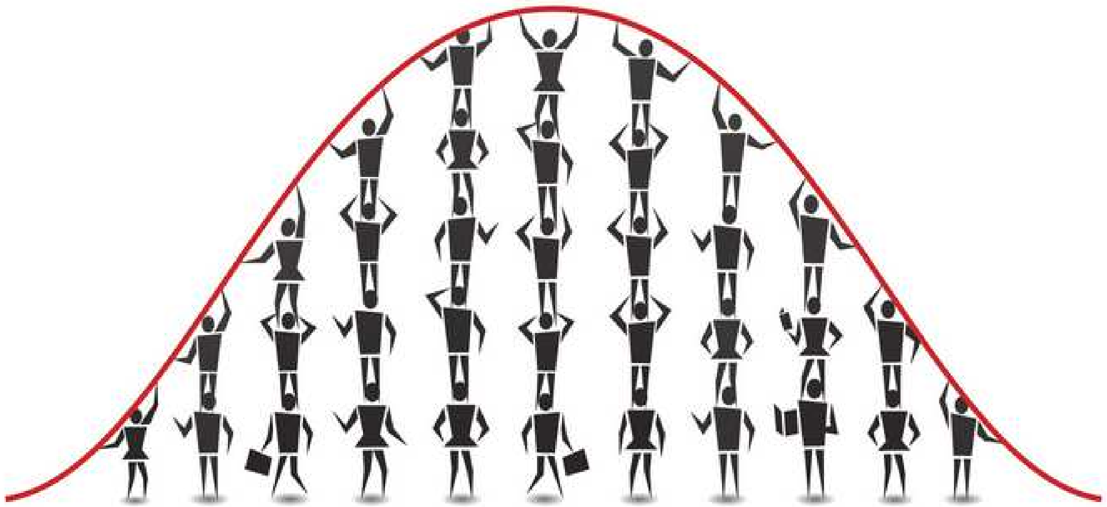
La distribuzione pentenaria

Se i risultati reali seguissero una distribuzione rigorosamente normale, la percentuale di casi che cadrebbero probabilisticamente in ciascuna delle fasce della distribuzione pentenaria sarebbero:



Sten- «standard ten»

Molte volte in modo da rendere facile il confronto tra gli individui, i punteggi dei test vengano riadattati. Una tale ridimensionamento è quello di un sistema di dieci punti. Il risultato si chiama punteggi Sten. La parola Sten è formata da abbreviare il nome di "standard ten."



$$\underline{\text{Sten} = 5{,}5 + 2z}$$

Generalizzazione dei punteggi Sten

Ci possono essere situazioni in cui vorremmo usare più o meno divisioni nella nostra scala.

Ad esempio, potremmo:

•usare una scala di cinque punti e far riferimento ai punteggi Stafive.
•usare una scala a sei punti e far riferimento ai punteggi di Stasix.
•usare una scala a nove punti e far riferimento ai punteggi Stanine.

stanine = 5 +2z

Il metodo del massimo e del minimo

Il ***metodo del massimo e del minimo*** *consiste quindi nella* trasformazione dei punteggi grezzi ottenuti in una scala diversa da quella utilizzata.

Poiché i docenti utilizzano nella valutazione un voto massimo e un voto minimo che non sempre corrispondono a 1 e a 10, è necessario determinare la corretta relazione di conversione che non vada a penalizzare la prestazione dello studente.

A tal proposito è necessario determinare i valori estremi dei punteggi grezzi attribuibili, per esempio 0 e 60, e attribuire ad essi i corrispondenti valori della scala dei voti, ad esempio 4 e 10.

$$\boxed{\frac{\text{Voto} - \text{Vmin}}{\text{Vmax} - \text{Vmin}} = \frac{\text{Punt} - \text{Pmin}}{\text{Pmax} - \text{Pmin}}}$$

Ranghi - punti percentili

Fanno riferimento alla posizione occupata dal soggetto nella distribuzione.

Per ottenere i percentili si ordinano i punteggi in maniera crescente e si verifica quale posizione occupa un determinato punteggio, dopodiché si trasforma tale posizione in percentuale rispetto al totale dei punteggi.

Il punteggio viene rapportato ad una distribuzione di 100 punteggi.

Possono essere calcolati per le scale ad intervalli o rapporti equivalenti e per le scale ordinali.

Ranghi o punti percentili

Per interpretare la prestazione di un individuo in un test, vediamo quale posizione occuperebbe nella graduatoria di punteggi nel campione normativo (CN).

Esempio.

- Punteggi nel CN: 18(5°) 19(4°) 23(3°) 27(2°) 30(1°).
- Se il punteggio di un individuo è 28, il suo rango sarebbe 2.

Se riferiamo la posizione di rango, ad un'ipotetica graduatoria di 100 individui **otteniamo il rango percentile**: quante persone sono al di sopra e al di sotto di un certo punteggio.

Esempio

In questa tabella l'osservazione 4 ha **rango A uguale a 1** perché, ordinando in maniera crescente i punteggi, risulta in prima posizione;

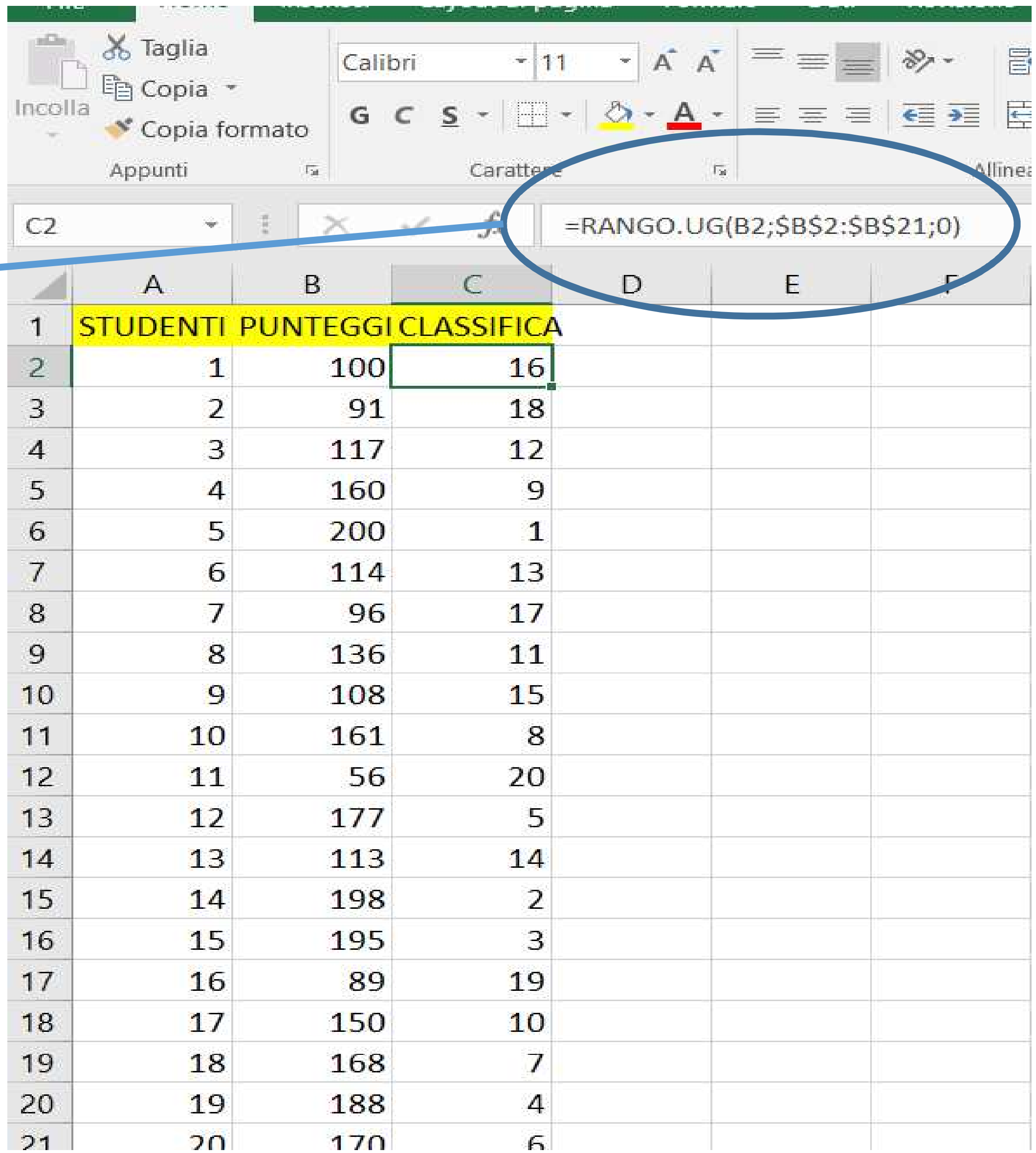
rango B uguale a 7 perché, ordinando in maniera decrescente, risulta in ultima posizione

OSSERVAZIONI	RANGO A	RANGO B
4	1	7
18	2	6
19	3	5
20	4	4
22	5	3
50	6	2
120	7	1

Esempio in Excel

Per Excel 2016
la funzione da utilizzare è

RANGO.UG



	A	B	C
1	STUDENTI	PUNTEGGI	CLASSIFICA
2	1	100	16
3	2	91	18
4	3	117	12
5	4	160	9
6	5	200	1
7	6	114	13
8	7	96	17
9	8	136	11
10	9	108	15
11	10	161	8
12	11	56	20
13	12	177	5
14	13	113	14
15	14	198	2
16	15	195	3
17	16	89	19
18	17	150	10
19	18	168	7
20	19	188	4
21	20	170	6

Esempio

Nel caso di **due o più osservazioni uguali** si procede calcolando la media dei ranghi iniziali, attribuiti inizialmente allo stesso punteggio.

Per Excel 2016

la funzione da utilizzare è

RANGO.MEDIA

Osserv.	rango a	Osserv. con due valori	ranghi iniziali	equivalenti	ranghi finali	Osserv con tre valori	ranghi iniziali	equivalenti	ranghi finali
4	1	4	1		1	4	1		1
18	2	18	2		2	18	2		2
19	3	19	3	3,5	3,5	19	3	4	4
		19	4	3,5	3,5	19	4	4	4
						19	5	4	4
20	4	20	5		5	20	6		6
22	5	22	6		6	22	7		7
50	6	50	7		7	50	8		8
120	7	120	8		8	120	9		9

Rango percentile

Nella distribuzione ordinata dei valori che la variabile assume nel campione, il **<u>rango percentile</u>** indica la posizione di un dato punteggio rapportata ad una distribuzione di cento valori.

DATI IN ORDINE CRESCENTE

SI DETERMINA LA POSIZIONE DEL PUNTEGGIO

SI APPLICA LA FORMULA

RP=(POS*100)/N

Esempio

Una persona sostiene due prove scritte, a quiz, per due concorsi. Ad uno arriva 12° su 146 concorrenti, all'altro 10° su 20 concorrenti.
In quale delle due graduatorie si è posizionato meglio?

Concorso 1:
pos=12; N=146; RP=12x100/146= **8.22**

Concorso 2:
pos=10; N=20; RP=10x100/20= **50.0**

Nella prova scritta del primo concorso i candidati che si posizionano meglio della persona in esame costituiscono l'8.22% mentre nel secondo concorso quelli che si posizionano meglio sono il 50%.
La sua posizione è quindi migliore alla prova scritta del primo concorso.

Formula di calcolo con Metodo di FERGUSON

Formula di calcolo
N = Numero delle osservazioni
G = Rango
RC = Rango percentile (o centile)

$$RC = 100 \cdot \frac{(N-(G-0{,}5))}{N}$$

Punto grezzo	rango	Rango centile o percentile
2	12	4,17
4	11	12,50
18	10	20,83
19	8	37,50
19	8	37,50
19	8	37,50
20	6	54,17
22	5	62,50
28	4	70,83
38	3	79,17
50	2	87,50
120	1	95,83

In Excel

L2 f_x =(($K$2-(K2-0.5))/$K$2)*100

Punto grezzo	rango	Rango centile o percentile
2	12	4,17
4	11	12,50
18	10	20,83
19	8	37,50
19	8	37,50
19	8	37,50
20	6	54,17
22	5	62,50
28	4	70,83
38	3	79,17
50	2	87,50
120	1	95,83

PUNTO GREZZO	RANGO	RANGO CENTILE O PERCENTILE)
2	12	4.17
4	11	12.50
18	10	20.83
19	8	37.50
19	8	37.50
19	8	37.50
20	6	54.17
22	5	62.50
28	4	70.83
38	3	79.17
50	2	87.50
120	1	95.83

$$RC = 100 \cdot \frac{(N-(G-0,5))}{N}$$

Percentile e Rango Percentile

<u>**PERCENTILE è un valore**</u>

<u>**RANGO PERCENTILE è una posizione**</u>

Il 20° percentile è 6-----------→VALORE

Il rango percentile di 6 è 20----------→POSIZIONE